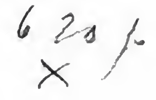
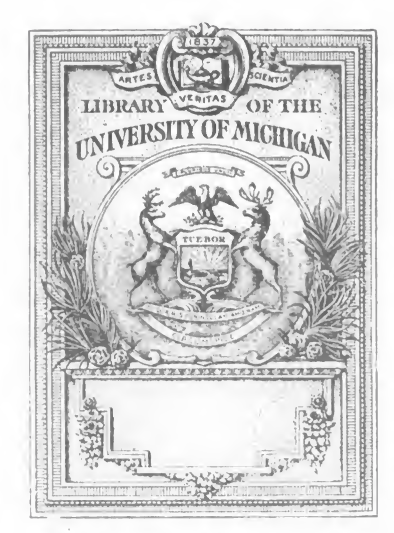
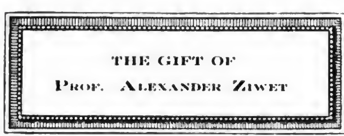
Franz Neumann und sein Wirken als Forscher und Lehrer

Albert Wangerin







…nde Dar-
stell… …nns, des
erste… …land, als
Fors… …umanns
Wer… …s erzählt.
Dabe… …wie seine
Wirk… …Der zweite
Teil… …alarbeiten
Neu… …einzelnen
die… …phie und
Mine… …ne Unter-
such… …ahlreichen
Erge… …von ihm
selbs… …gedruckt
vorliegenden Vorlesungen Neumanns, die von seinen Schülern herausgegeben sind, besprochen. Sodann wird an der Hand der Originalberichte und der Seminararbeiten ausführlich die Wirksamkeit Neumanns als Leiter des physikalischen Seminars erörtert.

Braunschweig, im März 1907.

Friedrich Vieweg und Sohn.



DIE WISSENSCHAFT

SAMMLUNG
NATURWISSENSCHAFTLICHER UND MATHEMATISCHER
MONOGRAPHIEN

NEUNZEHNTES HEFT

FRANZ NEUMANN

UND SEIN

WIRKEN ALS FORSCHER UND LEHRER

VON

DR. A. WANGERIN
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT HALLE A. S.

MIT EINER TEXTFIGUR UND EINEM BILDNIS NEUMANNS
IN HELIOGRAVÜRE

BRAUNSCHWEIG
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN
1907



BRAUNSCHWEIG
... FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN
1907



Thinnmann

FRANZ NEUMANN

UND SEIN

WIRKEN ALS FORSCHER UND LEHRER

VON

DR. A. WANGERIN

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT HALLE A. S.

MIT EINER TEXTFIGUR UND EINEM BILDNIS NEUMANNS IN HELIOGRAVÜRE

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1907

Published March 23, 1907.



VORREDE.

Einer Aufforderung des Herausgebers der Sammlung „Wissenschaft", deren Programm ja auch die Aufnahme von Biographien vorgesehen hat, entsprechend, habe ich es unternommen, die wissenschaftlichen Leistungen F. Neumanns ausführlicher zu besprechen, als es bisher geschehen ist, und zugleich sein hervorragendes Wirken als Lehrer zu schildern. Für letztere Schilderung konnte ich neben eigener Erinnerung aus meiner Studienzeit die in den Kuratorialakten der Königsberger Universität enthaltenen Seminarberichte Neumanns, sowie die im physikalischen Laboratorium zu Königsberg aufbewahrte Sammlung von Arbeiten aus Neumanns Seminar benutzen. Erstere wurden mir von dem Herrn Oberpräsidenten der Provinz Ostpreußen, letztere von Herrn Professor Volkmann gütigst zur Verfügung gestellt. Beiden Herren spreche ich an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aus. Vielfach wurden außerdem die bei Neumanns Tode erschienenen Schriften von W. Voigt („Zur Erinnerung an F. E. Neumann", Nachrichten der K. Ges. der Wissenschaften, Göttingen 1895) und von P. Volkmann (Franz Neumann, Leipzig 1896) zu Rate gezogen. Diese beiden Schriften sind im Text kurz als Voigt und Volkmann zitiert. Auch dem von mir veröffentlichten Nekrolog (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 4, 54 bis 68, 1895/97, und Leopoldina 32, 1896) konnte manches entnommen werden, ebenso dem vor kurzem erschienenen Bd. 2 von F. Neumanns gesammelten Werken.

Der Besprechung von Neumanns Arbeiten ist eine anspruchslose Darstellung seines äußeren Lebensganges vorangeschickt; für diese Darstellung fand ich ein reiches Material in dem schönen Buch: „Franz Neumann, Erinnerungsblätter von seiner Tochter Luise Neumann", Tübingen und Leipzig 1904. Dieses Werk, das im Text kurz als „Erinnerungsblätter" zitiert ist, beruht nicht, wie vielfach angenommen wird, auf hinterlassenen Aufzeichnungen Neumanns. Neumann hat, wie ich einer brieflichen Mitteilung von Fräulein Neumann entnehme, zwar hin und wieder den Versuch gemacht, ein Tagebuch zu führen. Alles zusammengenommen aber beschränken sich diese Versuche auf zehn kleine Oktavseiten. Aus diesen hat die Verfasserin einiges entnommen und dies in ihrem Werk jedesmal ausdrücklich bemerkt. Im übrigen beruht alles, was sie ihren Vater erzählen läßt, auf dessen mündlichen Mitteilungen, welche die Tochter aus der Erinnerung, und zwar größtenteils nach dem Hinscheiden des Vaters, niedergeschrieben hat.

Endlich sind mir von Fräulein Neumann einige Schriftstücke aus Neumanns Nachlaß für meine Schrift zur Verfügung gestellt, sowie von Herrn Professor C. Neumann acht Briefe Jacobis an F. Neumann. Auch für die Überlassung dieses Materials danke ich den Geschwistern Neumann herzlich.

Das der Schrift beigegebene Bild Neumanns ist nach einer aus dem Jahre 1865 stammenden Photographie angefertigt.

Halle a. S., im Oktober 1906.

A. Wangerin.

INHALTSVERZEICHNIS.

Erster Teil.

Franz Neumanns Leben.

Zweiter Teil.

Neumanns wissenschaftliche Arbeiten.

Dritter Teil.

Vorlesungen, Seminar, Laboratorium.

Seite

Erster Teil.

Franz Neumanns Leben.

1. Jugend- und Schuljahre. Feldzug von 1815.

Franz Neumann entstammte einer Familie, deren Mitglieder fast sämtlich Landwirte waren. Sein Vater, Ernst Neumann, war in den letzten Jahren des 18. Jahrhunderts Wirtschaftsverwalter auf dem in der Nähe von Joachimsthal in der Uckermark gelegenen Amte Grimnitz, sein Großvater, Christian Neumann, Förster auf der Schmelze, einer nahe bei Grimnitz gelegenen Oberförsterei. Hier, im großelterlichen Hause, wurde Franz Neumann am 11. September 1798 geboren; im Hause der Großeltern verlebte er seine ersten Jugendjahre. Bald starb der Großvater, und nun fiel die Erziehung des Knaben ganz der Großmutter zu, die sich dieser Aufgabe mit aufopfernder Liebe unterzog. Es waren sehr beschränkte Verhältnisse, in denen Franz Neumann heranwuchs. Seine Großmutter war nach dem Tode ihres Mannes nach dem Landstädtchen Joachimsthal in der Uckermark gezogen (die Stadt war in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts Sitz des später nach Berlin verlegten Joachimsthalschen Gymnasiums gewesen) und bewohnte dort mit ihrer verwitweten Tochter zusammen sowie deren zwei Söhnen eine kleine Wohnung, die aus einem Zimmer und einer Küche bestand. „Einmal im Winter wurde geschlachtet; das Fleisch mußte für das ganze Jahr ausreichen. In den schweren Zeiten 1806 bis 1812 blieb die Pension der Tante ganz aus, und es konnte trotz fleißiger Arbeit nur ein sehr kümmerliches Leben geführt werden“ [1]).

---

[1]) Erinnerungsblätter, S. 10—11.

In Joachimsthal besuchte Neumann die Volksschule bis zu seinem zehnten Lebensjahre. Seine weitere Ausbildung erhielt er in Berlin auf dem Werderschen Gymnasium. Im August 1808 siedelte er von Joachimsthal nach Berlin über, und zwar legte er den 10 Meilen weiten Weg zu Fuß zurück, in Begleitung von Fischern, die in der Nacht neben ihren Fischwagen nach Berlin wanderten [1]).

Auch in Berlin lebte er in sehr knappen Verhältnissen. Sein Vater, inzwischen Amtmann auf einem gräflichen Gute geworden, wünschte dringend dem Sohne eine höhere Ausbildung zu geben, konnte aber nur mit Mühe die nötigen Mittel dazu erübrigen. So kam denn Franz Neumann in Pension zu einem Tischler, in dessen kleiner Werkstatt er bei einer Docht-Hängelampe seine Schularbeiten machen mußte. 1813 vertauschte er diese Pension mit der des Herrn Baldemann, Küsters an der Domkirche, und nun begannen für ihn freundlichere Zeiten, da er, wiewohl nur ein geringes Kostgeld zahlend, doch ganz als Mitglied der Familie behandelt wurde. Dieser Familie hat Neumann denn auch eine große Anhänglichkeit und Dankbarkeit bis in sein spätestes Alter bewahrt [2]).

Früh trat in der Schule seine Neigung und Begabung für Mathematik zutage; er war der Lieblingsschüler seines mathematischen Lehrers Dr. Nordmann. Die Mathematikstunde war, wie einer seiner Mitschüler, Willibald Alexis, in seinen Erinnerungen mitteilt, gewissermaßen ein Privatissimum, das der Lehrer für Neumann hielt, während die übrigen Schüler ihren Gedanken und Spielereien überlassen wurden. Schon 1812 hegte Neumann den Wunsch, sich ganz dem Studium der Mathematik zu widmen, doch sprach sich sein Vater dagegen aus. Im übrigen knüpften sich für Neumann an die Gymnasialzeit und die meisten seiner Lehrer keine allzu freundlichen Erinnerungen. „Unser Interesse am Lernen wurde wenig geweckt“, sagte er selbst [3]).

Geweckt wurde aber in dieser Zeit durch die politischen Verhältnisse, durch den schweren Druck, der auf Preußen lastete, der glühende Patriotismus, der Neumann sein Leben lang beseelte. Einen besonders tiefen Eindruck hat auf den Knaben

[1]) Erinnerungsblätter, S. 17.
[2]) Ebend., S. 23.
[3]) Ebend., S. 18.

der Einzug Schills in Berlin im Jahre 1808 gemacht; später waren es Schleiermacher, von dem er 1813 eingesegnet war, und Ludwig Jahn, an dessen Turnübungen er von 1814 an teilnahm, die den größten Einfluß auf das jugendliche Gemüt und das Denken Franz Neumanns ausübten. Als sich bei der Erhebung des Volkes im Jahre 1813 die oberen Klassen der Schulen leerten, da fast alle Schüler in das Feld zogen, mußte Neumann zu seinem großen Schmerz zurückbleiben; denn vor Vollendung des 16. Lebensjahres wurde niemand als Freiwilliger eingestellt. Erst bei Wiederausbruch des Krieges im Jahre 1815 durfte er sich melden. Mit einer großen Anzahl seiner Mitschüler zusammen trat er als freiwilliger Jäger in das Kolberger Regiment. Nach notdürftiger Ausbildung wurden die Freiwilligen dem schon im Felde stehenden Regiment nachgesandt, das sie Anfang Juni erreichten, und mit dem sie am 16. Juni an der Schlacht von Ligny teilnahmen. Gleich in dieser ersten Schlacht wurde Franz Neumann schwer verwundet; eine Kugel, welche die linke Backe getroffen, sämtliche Zähne der linken Seite und einige der rechten mitgenommen hatte und an der Nase wieder herausgefahren war, hatte ihn zu Boden gestreckt. Nachdem er, der als tot auf dem Schlachtfelde zurückgelassen war, seine Besinnung wiedererlangt, gelang es ihm nur dadurch, daß andere Soldaten sich seiner annahmen, am Abend des nächsten Tages ein Lazarett zu erreichen. Hier wurden seine Wunden für unheilbar erklärt, und nur mit Mühe erlangte er, daß er überhaupt verbunden wurde. Mit anderen Verwundeten wurde er, dessen ganzes Gesicht in Eiterung übergegangen war, sodann auf Kähnen und Wagen nach Düsseldorf gebracht. Über diese Fahrt sagt Willibald Alexis in seinen Erinnerungen[1]: „Auf einem jener offenen Wagen, welche mit Schwerverwundeten überfüllt waren, ungeschützt vor Sonnenbrand und Regengüssen, lag auch einer meiner näheren Bekannten. ... Er versicherte uns oft nachher, das Wort „incurable“ von den Lippen des Chirurgs dröhne ihm noch nachts und tags in den Ohren. ... Wo man sich seiner annahm, mußte man ihm durch Federposen die Flüssigkeit einflößen, um seinem sonst gesunden Körper Nahrung zu geben.“

Erst im Lazarett zu Düsseldorf wurde Neumann, 14 Tage

[1]) Vgl. Erinnerungsblätter, S. 52.

nach seiner Verwundung, richtig verbunden, erst hier kam er in geordnete Pflege. Insbesondere nahmen sich drei Damen, die die Aufsicht im Lazarett führten, seiner liebevoll an, und so besserte sich sein Zustand bald. Als er sich etwas wohler fühlte, litt es ihn nicht länger in Düsseldorf. Obwohl noch nicht völlig wiederhergestellt, eilte er zu seinem Regiment zurück, das an der Belagerung der Maasfestung Givet teilnahm. Dort brach infolge der Strapazen und der feuchten Witterung die noch nicht ganz geheilte Wunde wieder auf, aber trotz dieses Siechtums blieb er bis zum Ende des Feldzuges bei seinem Truppenteile. Ende Dezember begann der Rückmarsch der freiwilligen Jäger ins Vaterland. Am 8. Februar 1816 langte die Abteilung in Berlin an, und die Freiwilligen wurden entlassen.

2. Ende der Schulzeit. Studienzeit.

Trübe lag nun die Zukunft vor Neumann. Sein Vater, der während der Kriegszeit fast sein ganzes Vermögen verloren hatte, konnte ihm nur die geringe Unterstützung von fünf Talern monatlich gewähren. Trotz seiner Mittellosigkeit entschloß Neumann sich, gleichzeitig mit mehreren seiner Kriegskameraden, wieder in das Gymnasium, das er vor einem Jahre verlassen hatte, einzutreten. Noch $1^1/_2$ Jahre besuchte er die Schule, bis er im Herbst 1817 das Reifezeugnis erhielt. Er bezog nun die Berliner Universität, um, einem Wunsche seines Vaters entsprechend, Theologie zu studieren. Um diese Zeit hatte sein Vater durch einen Brand alle seine Habe verloren und konnte seinen Sohn nicht weiter unterstützen. Ein Freitisch, den ihm sein früherer Gymnasialdirektor erwirkt hatte, und der Ertrag von Privatstunden, die er erteilte, bildeten das ganze Einkommen Neumanns. Er schlief, da er kein eigenes Zimmer mieten konnte, in der Wohnung eines Bekannten auf bloßer Diele, mit seinem Soldatenmantel zugedeckt. Noch kümmerlicher erging es ihm, als er in Jena seine Studien fortsetzte. „Törichterweise“, sagen die Erinnerungsblätter[1]), „ließ ich mich im April 1818 durch meinen Freund Dulitz verleiten, nach Jena zu gehen. Dort war meine Lage viel schlimmer, wenngleich ein Student mit

[1]) Erinnerungsblätter, S. 90—93.

Namen Penz mich wieder bei sich aufnahm. . . . Penz hatte ein großes zweifenstriges Zimmer. Da richtete jeder von uns an einem der Fenster seinen Arbeitsplatz ein. Wir arbeiteten fleißig. Das war schön, aber schlimm war es, daß ich mit meiner Kleidung zu mangelhaft bestellt war, um Stunden geben zu können. Eigentlich besaß ich nur Hose und Weste, mein alter Soldatenmantel mußte den fehlenden Rock ersetzen und alles decken. Was aber das Allerschlimmste war — ich lernte nichts."

„In Berlin hatte ich Neander und Schleiermacher gehört, auf Wunsch meines Vaters auch juristische Vorlesungen besucht, aber weder dem Studium der Theologie, noch dem der Jurisprudenz Geschmack abgewinnen können. Hier in Jena belegte ich außer naturphilosophischen Kollegien bei Oken verschiedene naturwissenschaftliche Vorlesungen; aber auch diese befriedigten mich wenig." Und in einem später an das preußische Unterrichtsministerium gerichteten Unterstützungsgesuch sagt er von seinen Jenenser Studien: „Auch ist mein Fleiß mehr im eigenen Studieren, als im Besuche der Vorlesungen zu finden, da ich Mathematik studiere, die Vorlesungen darüber sich aber nur auf die niederen Teile erstrecken." Aus dieser Zeit sei das folgende Urteil eines Studiengenossen, des späteren Kunstschriftstellers und Malers Ernst Förster (1800—1885), über Neumann mitgeteilt[1]):

„Besonders wert um ihrer naturwissenschaftlichen Studien willen waren mir zwei Studenten. . . . Der andere war der Mineraloge Neumann, dessen äußere Erscheinung den reichen Inhalt seines Inneren nicht verriet, wie denn auch sein stets bereiter offener Humor nicht entfernt ahnen ließ, mit wie bitterer Not er zu kämpfen hatte. Als Andenken an den Befreiungskrieg, in welchem er als Freiwilliger mitgekämpft, trug er die Spuren einer französischen Kugel im Gesicht, die ihm die obere Kinnlade zerschmettert hatte, und außerdem einen alten grauen Mantel, den er im Sommer und Winter anstatt eines Rockes trug, den er nicht hatte. Von seiner stets guten Laune gab es viel ergötzliche Proben, deren wohl manche an den alten Studentenstil er-

---

[1]) Siehe Försters Selbstbiographie „Aus der Jugendzeit". Stuttgart 1887, S. 140. Vgl. auch Volkmann, S. 6; Erinnerungsblätter, S. 96.

innern mochten, aber ohne die Grenzen eines guten und kecken Humors zu verletzen."

In Jena verweilte Neumann, der Mitglied der Burschenschaft geworden war, etwa ein Jahr. Dann kehrte er, als infolge des Sandschen Attentates an alle preußischen Studierenden der Befehl erging, innerhalb 24 Stunden Jena zu verlassen, nach Berlin zurück. Hier gab er das Studium der Theologie endgültig auf und wandte sich ganz den Naturwissenschaften zu. Vor allem zogen ihn die Vorlesungen des Mineralogen Ernst Christian Weiss an. Neumann sagt über diesen Lehrer[1]):

„Ich kann wohl sagen, er war der einzige, bei dem ich etwas lernte — ihm verdanke ichs, wenn etwas aus mir geworden ist."

Hinsichtlich seiner mathematischen Studien war Neumann ganz auf sich selbst angewiesen; ein Versuch, eine mathematische Vorlesung in Berlin zu hören, mißlang, da der betreffende Professor, um die Vorlesung nicht zustande kommen zu lassen, sie so hielt, daß er etwa erscheinende Zuhörer völlig abschreckte. Auch in dieser Zeit fristete er sein Leben unter den größten Entbehrungen.

„Wieder habe ich[2]) das ganze Jahr auf bloßer Diele geschlafen in der Wohnung eines Freundes. Ich habe von Kaffee und Brot gelebt — den Kaffee, d. h. Kaffee-Surrogat, kochte ich auf kleinem Spirituslämpchen, dessen Heizkraft ich dadurch erhöhte, daß ich Holzspäne und dünne Äste, aufs feinste zerkleinert, sorgfältig über der Flamme aufschichtete. Die Späne und Äste suchte ich mir auf der Straße."

Daß sein Streben unter so ungünstigen äußeren Verhältnissen nicht erlahmte, ist bewunderungswürdig. Dem größten Mangel wurde durch ein Stipendium von 100 Talern abgeholfen, das ihm der Minister v. Altenstein verlieh. Seine sparsame Lebensweise ermöglichte es ihm, von jener geringen Summe noch Ersparnisse zu machen, die er zu einer geognostischen Studienreise nach dem Riesengebirge und Oberschlesien verwandte. Nach gründlichster Vorbereitung trat er im August 1820 die Reise an, die in erster Linie seiner weiteren wissenschaftlichen Ausbildung, der Erweiterung seiner Anschauung dienen sollte. Daneben ver-

---

[1]) Erinnerungsblätter, S. 110.

[2]) Ebend., S. 112.

folgte er den praktischen Zweck, Mineralien und Fossilien für das Berliner Mineralienkabinett zu sammeln. Mit Eifer widmete er sich während seiner drei Monate dauernden Reise dieser Aufgabe, die ihm zwar durch Unterstützung der preußischen Bergbehörden, denen er durch das Ministerium empfohlen war, erleichtert wurde, die aber trotzdem noch mühevoll genug war. Auf tagelangen Wanderungen mußte er seinen mit Steinen gefüllten Tornister tragen, der oft so schwer war, daß die kräftigsten Bauern Mühe hatten, ihn zu heben. Eine Bezahlung für die wertvolle Sammlung, die noch jetzt im Berliner Museum für Naturkunde vorhanden ist, lehnte Neumann ab und ließ sich nur durch vieles Zureden von Weiss bestimmen, einen Ersatz der Reisekosten, 30 Taler, anzunehmen.

Im nächsten Jahre trug sich Neumann mit dem Plan einer weiteren Reise zur mineralogischen Erforschung der Karpathen. Die Ausführung des Planes wurde zunächst dadurch hinausgeschoben, daß ihm eine Unterstützung, die das Ministerium ihm für die frühere Reise nach Schlesien zugesichert hatte, nicht rechtzeitig gezahlt wurde. Dann aber trat ein Ereignis ein, das Neumanns Leben für einige Zeit in ganz andere Bahnen lenkte. Am 13. Mai 1821 starb sein Vater, an dem er stets mit innigster Liebe gehangen hatte. Der Vater hatte lange Jahre in Hingebung und Treue das Gut und das Vermögen einer Gräfin verwaltet, deren einzige Stütze er gewesen war. Seitens dieser Dame erging an Franz Neumann die Aufforderung, sich der Landwirtschaft zu widmen, um später an die Stelle seines Vaters zu treten. Neumann glaubte sich dieser Aufforderung nicht entziehen zu dürfen, weil er es für eine Pflicht der Pietät hielt, das Andenken seines Vaters dadurch zu ehren, daß er fortsetzte, was jener nicht vollenden konnte; auch die hohe Verehrung, die Neumann für die Gräfin hegte, war mitbestimmend für seinen Entschluß. Schweren Herzens brach er seine Studien ab, um sich der neuen Lebensaufgabe zu widmen. Indessen gewährten ihm die Verhältnisse, unter denen er auf dem Lande lebte, keinerlei Befriedigung. Er fühlte sich dort gar nicht an seinem Platze und erkannte bald, daß er, vorläufig wenigstens, nur geringen Nutzen stiften könne. Nach langen inneren Kämpfen gab er daher den Plan, Landwirt zu werden, auf und kehrte im Herbst 1821 zur Wissenschaft zurück. Auch große äußere Vor-

teile, die ihm für die Zukunft in Aussicht gestellt wurden, wenn er bliebe, vermochten nicht, ihn in seinem Entschluß wankend zu machen. Doch brach er damit seine Beziehungen zur Gräfin nicht völlig ab; wiederholt war er in den nächsten Jahren in ihrem Interesse tätig und ihr bei der Verwaltung des Gutes behilflich [1]).

3. Erste wissenschaftliche Arbeiten. Promotion.

Im Herbst 1821 nahm Neumann seine Studien wieder auf, wenn er ihnen aus den eben angeführten Gründen zunächst auch noch nicht seine ganze Zeit widmen konnte. Bald wandte er sich eigenen Untersuchungen zu und verfaßte im Jahre 1822 [2]) und 1823 sein erstes Werk: Die Beiträge zur Krystallonomie. Dem im September 1823 erschienenen Buche, einem Oktavbande von 152 Seiten Text nebst 16 Seiten Vorwort und Einleitung, dem 54 Figuren [3]) auf 12 Tafeln beigegeben sind, wollte Neumann eine Reihe von zwanglosen Heften folgen lassen, in denen einerseits die Resultate seiner eigenen kristallographischen Arbeiten niedergelegt, andererseits aber auch die Beobachtungen anderer Forscher nach seiner neuen graphischen Methode dargestellt werden sollten, „so daß diese Beiträge zugleich ein Repertorium aller krystallographischen Beobachtungen" gebildet haben würden. Leider ist es zur Ausführung dieses Planes nicht gekommen; nicht einmal das zweite, noch für dasselbe Jahr in Aussicht gestellte Heft ist gedruckt, vermutlich weil der buchhändlerische Erfolg der Beiträge kein erheblicher und Neumann selbst nicht in der Lage war, die Druckkosten zu bezahlen.

Auf den Inhalt der Beiträge im einzelnen soll im nächsten Abschnitte eingegangen werden. Nur das sei hier kurz bemerkt, daß die Schrift insbesondere wegen der in ihr entwickelten neuen Projektionsmethode der Kristalle als epochemachend bezeichnet

[1]) In den Erinnerungsblättern ist eine Reihe interessanter Briefe, von Neumann an die Gräfin und von dieser an Neumann gerichtet, abgedruckt.

[2]) Daß ein Teil des Werkes schon im Sommer 1822 vollendet war, sagt Neumann ausdrücklich in der Vorrede.

[3]) Die Figuren tragen die Nummern 1 bis 48; verschiedene Figuren haben aber dieselbe Nummer, mit a, b usw. unterschieden.

werden kann, was unter anderen Th. Liebisch in dem Werke: „Die deutschen Universitäten", herausgegeben von W. Lexis, Berlin 1893, Bd. II, S. 56 anerkennt. Von den Zeitgenossen war es besonders Neumanns Lehrer Weiss, der die Bedeutung des Werkes seines Schülers würdigte. Er dankte Neumann für das „schöne Exemplar seiner schöneren Schrift[1])", empfahl ihm, dem Minister v. Altenstein ein Exemplar der Beiträge zu übersenden und übertrug ihm zugleich vertretungsweise eine Assistentenstelle beim mineralogischen Museum. Auch weiterhin war Weiss bestrebt, Neumann zu fördern, um ihm die Universitätslaufbahn zu ermöglichen. Auf Weiss' Veranlassung hielt Neumann im Winter 1823—1824 vor einem auserwählten Publikum Vorträge über Kristallographie und besonders über seine neue Projektionsmethode der Kristalle.

„Zu meinem Staunen sah ich einen Zuhörerkreis von etwa 30 Personen vor mir und erkannte unter ihnen die ersten Kapazitäten Berlins: Leopold v. Buch, Alexander v. Humboldt, Oberbergrat v. Dechen, Exzellenz v. Jasky u. a. Ich weiß gar nicht, wie ich dazu kam, daß die Herren regelmäßig bei mir hörten. Ich las über Krystallographie und entwickelte eine neue Methode — das alles verdanke ich der großen Güte von Weiss. Er hatte mir das verschafft: Ihm verdanke ich meine ganze Laufbahn!"

„Selbstverständlich hielt ich diese Vorlesungen unentgeltlich, Leopold v. Buch ließ es sich aber nicht nehmen, mir ein Honorar zu schicken" [2]).

Andere der damaligen Zuhörer bewiesen sich in anderer Weise dankbar. Der Oberbergrat v. Dechen machte Neumann auf Fouriers Werke aufmerksam und verschaffte ihm dieselben leihweise. Mit Feuereifer vertiefte sich Neumann in das Studium der Arbeiten Fouriers, den er später oft als seinen vornehmsten Lehrer bezeichnete. Fouriers Wärmetheorie schrieb er, um sie zu besitzen, sich selbst ab[3]). Den in Rede stehenden Vorlesungen verdankte es Neumann ferner, daß eine vom Generalleutnant v. Jasky dem König Friedrich Wilhelm III. zur Ver-

[1]) Erinnerungsblätter, S. 202—203.

[2]) Ebend., S. 223—224.

[3]) Voigt, S. 7.

fügung gestellte bedeutende Mineraliensammlung der Universität Königsberg und damit Neumann zur Benutzung überwiesen wurde [1]).

Um seine Zukunft zu sichern, meldete sich Neumann im Herbst 1824 bei der wissenschaftlichen Prüfungskommission zum Oberlehrerexamen. Von Poselger, der jener Kommission als Mathematiker angehörte, wurden ihm am 23. Oktober 1824 folgende Aufgaben gestellt: 1. eine geometrische Abhandlung über Berührungen, 2. eine analytisch-geometrische über gerade Linie und Ebene. Außerdem sollte er vor der mündlichen Prüfung eine Probelektion über die ersten Gründe der Stereometrie nach Anleitung des XI. Buches der Elemente des Euklid halten. Die Prüfung selbst scheint Neumann nicht abgelegt zu haben, wenigstens findet sich in den Akten des Provinzial-Schulkollegiums und der Prüfungskommission nichts darüber, ebensowenig in Neumanns hinterlassenen Papieren. Weshalb Neumann den Plan, die Oberlehrerprüfung abzulegen, aufgab, läßt sich aus einer Stelle in einer gleich zu besprechenden Eingabe an das Ministerium entnehmen. Neumann fühlte, daß es ihm nicht möglich sei, die rein wissenschaftliche Beschäftigung ganz aufzugeben, und fürchtete, daß die Ansprüche der Schule und der Wissenschaft ihn in einen inneren Zwiespalt verwickeln könnten, der ihn unglücklich machen würde. Er wandte sich daher noch vor Ablegung der Prüfung, am 2. Januar 1825, an das Ministerium mit der Bitte, ihm nach Ablauf der interimistischen Stellung, die er am mineralogischen Museum bekleidete, eine andere wissenschaftliche Bestimmung zu erteilen. Er motivierte diese Bitte damit, daß seine Gesundheit ihm nicht gestatte, sich ähnlichen Entbehrungen wie früher zu unterziehen, und daß er deshalb seine äußere Subsistenz sicher zu stellen wünsche. Am liebsten würde er seine Fähigkeiten als Dozent an einer Universität betätigen, und neben der Mineralogie, mit deren mathematisch-physikalischen Teilen er sich bisher vorwiegend beschäftigt habe, die Abschnitte der Physik lehren, die eine höhere mathematische Ausbildung schon erhalten hätten, oder doch deren jetzt schon fähig seien. Doch werde er, wenn das Ministerium es so bestimme, auch eine Lehrer-

[1]) Erinnerungsblätter, S. 244.

stelle übernehmen. Nur bitte er, in diesem Falle ihm noch eine Frist zur Ausarbeitung der Fortsetzung seiner Beiträge zur Kristallonomie zu gewähren und ihn während dieser Zeit durch eine Unterstützung vor Mangel zu schützen. Auf diese Eingabe, in der zum ersten Male das Ziel, das er sich gesteckt, klar ausgesprochen ist, erhielt Neumann am 10. Januar 1825 folgende Antwort[1]):

„Das Ministerium eröffnet Ihnen auf die Vorstellung vom 2ten dieses Monats, daß es für jetzt keine Gelegenheit hat, Ihnen einen anderweitigen wissenschaftlichen Wirkungskreis anzuweisen. Wenn sich eine solche Gelegenheit darbietet und Sie sich als Privatdozent bewährt haben, wird dasselbe Ihres Gesuches eingedenk sein und solches so viel als möglich berücksichtigen. Um Sie indessen in den Stand zu setzen, Ihre wissenschaftlichen Bestrebungen zu verfolgen, und sich teils durch schriftstellerische Arbeiten, teils durch Vorlesungen bei der hiesigen Universität gegründete Ansprüche auf weitere Berücksichtigung zu erwerben, will das Ministerium Sie gern, so weit seine beschränkten Fonds das gestatten, von Zeit zu Zeit außerordentlich unterstützen und hat Ihnen vorläufig eine Summe von

Einhundert und fünfzig Talern

bewilligt.

Ministerium der Geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten

Altenstein."

Am Ende des Sommersemesters 1825 bewarb sich Neumann bei der Berliner philosophischen Fakultät um die Promotion. Als Promotionsschrift reichte er eine geometrische Abhandlung (über das Problem des Apollonius und dessen Erweiterungen) ein, auf deren Inhalt weiter unten eingegangen werden soll. Diese Arbeit, die Weierstrass gesprächsweise in den siebziger und achtziger Jahren wiederholt als eine ausgezeichnete, noch für die Jetztzeit wertvolle Leistung bezeichnete, fand seitens der Fakultät nicht die Anerkennung, die sie verdiente. Das Urteil von Dirksen lautete: „Daß der Gegenstand der Dissertation und die darin befolgte Methode, beide, mit Rücksicht auf ihre Bedeutsamkeit einer früheren Periode der Wissen-

[1]) Erinnerungsblätter, S. 227.

schaft angehören, der jetzigen Richtung der Mathematik und dem Bedürfnis eines Physikers . . . so fremd sind, daß ich nicht einsehe, wie der Verfasser . . . einen so unzeitigen Stoff hat wählen und sich so ganz auf den Tummelplatz angehender Gymnasiallehrer hat zurückwerfen können. Zu Vietas Zeiten hätte die eingereichte Arbeit allerdings ihren großen Wert gehabt". . . . Trotz dieser Beurteilung wurde die Dissertation nicht zurückgewiesen, ihr Verfasser vielmehr zur mündlichen Prüfung zugelassen, die er am 5. November 1825 bestand. Das Gesamturteil faßte der Dekan in die Worte zusammen: „daß der Kandidat seine Würdigkeit, das testimonium doctrinae zu erhalten, besonders durch seine gründlichen physikalischen Kenntnisse aufs ehrenvollste bekundet habe [1])".

Nach bestandenem Examen erklärte sich Neumann freiwillig bereit, statt der nicht ganz gebilligten mathematischen eine andere Abhandlung einzuliefern. Es war dies die Arbeit: „De lege zonarum principio evolutionis systematum crystallinorum". Nach Druck derselben und gehaltener öffentlicher Dis-

---

[1]) Die Nachrichten über Neumanns Promotionsprüfung und über die Beurteilung seiner Promotionsschrift verdanke ich Herrn Prof. H. A. Schwarz, der auf meine Bitte im Jahre 1895 die Güte hatte, die Angaben des Textes aus den Akten der Berliner philosophischen Fakultät auszuziehen.

In der Isis, in der die geometrische Arbeit später veröffentlicht ist, ist als Jahreszahl MDCCCXV angegeben, eine Angabe, die mich früher auf die Vermutung führte, die letzte Ziffer V sei eine verstümmelte X, und die Arbeit sei schon 1820 abgefaßt. Daß diese Vermutung eine irrige war, geht daraus hervor, daß aktenmäßig feststeht, daß die Abhandlung erst am Ende des Sommers 1825 der Berliner Fakultät eingereicht ist. Wahrscheinlich ist die Jahreszahl infolge eines Schreibfehlers Neumanns falsch angegeben. Nach einer Mitteilung des Herrn Prof. H. A. Schwarz enthält Neumanns Eingabe an die Fakultät, in der er sich um die Zulassung zur Promotionsprüfung bewirbt, denselben Schriftfehler.

Die vorstehenden Angaben, wie der ganze Passus über Neumanns Promotion sind im wesentlichen meinem im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IV (Berlin 1897) veröffentlichten Nekrologe entnommen. Damals kannte ich die Akten über die Neumann zur Oberlehrerprüfung gestellten Aufgaben noch nicht. Seitdem ich darüber unterrichtet bin, halte ich es für wahrscheinlich, daß die erste jener Aufgaben Neumann zur Abfassung seiner geometrischen Dissertation angeregt hat.

putation wurde er am 16. März 1826 zum Doktor promoviert. Die Thesen, über die er disputierte, lauteten:

1. Densitas materiae nil nisi fictio est, quae tolerari nequit.

2. Theoria de propagatione caloris, in corporibus solidis, a cel. Fourier proposita, nimium sibi assumit, quod calorem radiantem spatio coelesti inesse contendit.

3. Hypotheses a naturae explicatione prohibendae.

4. Individua concreta crystalli gemini ad determinandum aliquod planum non una agunt.

5. Principium geminationis crystallinae in hoc situm est, quod utriusque crystalli directiones ejusdem mensurae crystallonomicae inter se permutantur.

Seine Opponenten waren: Carol. Reuter, Stud. theol.; Herm. Franke, Cand. phil.

4. Die erste Zeit in Königsberg (1826—1829).

Am 24. April 1826 überreichte Neumann dem Minister seine Dissertation zugleich mit einer 1825 verfaßten und in Pogg. Ann. veröffentlichten kristallographischen Arbeit über das Kristallsystem des Axinits. Bei dieser Gelegenheit kam er auf die ihm am 10. Januar 1825 gemachten Versprechungen zurück, erwähnte, daß er bisher durch wiederholte Kränklichkeit verhindert gewesen sei, Vorlesungen an der Berliner Universität zu halten, daß er aber jetzt im Begriff stehe, sich an derselben zu habilitieren. Er bat zugleich unter Hinweis auf seine bedrängte Lage, ihn durch weitere Unterstützung in den Stand zu setzen, seine Bestrebungen weiter verfolgen zu können. Auf diese Eingabe erhielt er am 6. Mai 1826 den Bescheid, daß das Mnisterium nach Erwägnng aller Verhältnisse für rätlich halte, daß Neumann sich in Königsberg habilitiere. Zugleich war ihm darin eine jährliche Remuneration von 200 Talern, sowie 50 Taler zur Bestreitung der Reisekosten zugesichert.

Nur ungern folgte Neumann dieser Aufforderung des Ministers. Einmal wurde es ihm schwer, Berlin und damit seine alten Freunde zu verlassen, sodann fürchtete er, daß ihm für seine mineralogischen Vorlesungen, deren Abhaltung seine Hauptaufgabe sein sollte, dadurch Schwierigkeiten erwachsen könnten, daß die Königsberger Mineralien-Sammlung nicht von vornherein

ihm unterstellt, er vielmehr hinsichtlich ihrer Benutzung auf die Gefälligkeit von Prof. Hagen angewiesen wurde. Er legte dem Ministerium sein Bedenken dar, bat auch, ihn lieber an die Breslauer Universität zu senden als nach Königsberg. Alle diese Vorstellungen waren vergeblich, Neumann wurde aufgefordert, sich zu erklären, ob er nach Königsberg gehen wolle oder nicht. Da er durch eine Weigerung jede Aussicht auf Beförderung in Preußen zu verlieren fürchtete, so willigte er schweren Herzens in die Übersiedelung nach Königsberg, in der stillen Hoffnung allerdings, daß der Aufenthalt dort nur ein kurzer sein, nicht länger als ein Jahr dauern würde.

Doch wie anders gestaltete sich die Zukunft! Nicht ein Jahr, sondern ein langes Leben hindurch währte der Aufenthalt in Königsberg, und so ungern er dorthin gegangen, so lieb war ihm in späterer Zeit die neue Heimat. Die Vorliebe des jungen Dozenten für Berlin verwandelte sich im Laufe der Zeit geradezu in eine gewisse Abneigung gegen Berlin und die Berliner. Auf seinen Reisen in späterer Zeit vermied er es meist, Berlin zu berühren; nur um den Einzug der siegreichen Krieger 1866 und 1871 zu sehen, besuchte er die Hauptstadt.

Im Herbst 1826 siedelte Neumann nach Königsberg über; eine acht Tage und acht Nächte dauernde Postfahrt führte ihn an den Ort seiner neuen Wirksamkeit. Unter günstigen Auspizien begann Neumann seine Lehrtätigkeit an der Königsberger Universität. Wirkte doch an dieser seit 1810 der große Astronom Bessel, der die dortige, nach heutigen Begriffen kleine und nur mit sehr geringen äußeren Mitteln ausgestattete Sternwarte für Jahrzehnte zum Mittelpunkt des gesamten astronomischen Lebens gemacht hat. Zu ihm trat Neumann bald in ein freundschaftliches, später in ein verwandtschaftliches Verhältnis. Auch andere Zweige der Naturwissenschaften, deren Studium früher in Königsberg sehr daniedergelegen[1]), hatten einen Aufschwung genommen, so namentlich die Zoologie, die seit Beginn der zwanziger Jahre von Karl Ernst v. Baer (1792—1876) vertreten

[1]) Waren doch die gesamten naturwissenschaftlichen Fächer: Botanik, Zoologie, Mineralogie, Chemie (inkl. Pharmazie) und Physik, lange Zeit durch einen einzigen Professor, Karl Gottfried Hagen, vertreten, der erst in den zwanziger Jahren einen Teil seiner Vorlesungen an andere Dozenten abgab.

war, der zugleich Anatomie lehrte, sich aber immer mehr und mehr der Zoologie zuwandte. Von besonderer Bedeutung für das Studium der Mathematik und Physik wurde es, daß in demselben Jahre, in dem Neumann Dozent in Königsberg wurde, auf Veranlassung des Ministers noch zwei andere junge Berliner sich dort habilitierten, Jacobi für Mathematik, Dove für Physik. Zu beiden trat Neumann bald in nähere Beziehung; mit Jacobi verband ihn später dauernde Freundschaft[1]). Auch sein Verhältnis zu Hagen gestaltete sich besser, als er erwartet hatte; Neumanns Befürchtungen, Hagen könne ihm hinsichtlich der Benutzung der Mineraliensammlung Schwierigkeiten machen, erwiesen sich als irrig.

Trotz alledem dauerte es mehrere Jahre, bis sich Neumann in Königsberg wohl und heimisch fühlte; denn bei seiner Zurückhaltung Fremden gegenüber bedurfte es längerer Zeit, bis er den späteren Königsberger Freunden näher trat und in ihnen Ersatz für die Freunde fand, die er in Berlin verlassen hatte. Die Sehnsucht nach letzteren ließ ihn seine Einsamkeit schwer empfinden und versetzte ihn oft in eine gedrückte Stimmung. Mit veranlaßt wurde diese Stimmung durch die Einschränkungen, zu denen ihn sein geringes Einkommen zwang, sowie durch den Umstand, daß für die Disziplin, die zu lehren er berufen war, in Königsberg nur ein geringes Interesse bestand. Seine erste Vorlesung im Winter 1826—1827 (über Kristallographie) hielt er vor nur drei Zuhörern, und im darauf folgenden Sommersemester scheint er Vorlesungen ohne Erfolg angekündigt zu haben. Nimmt man dazu, daß in jener Zeit auch seine Gesundheit gelitten hatte, so kann man sich nicht wundern, wenn er um diese Zeit von sich sagt: „Mein Mut ist erloschen“.

Seine Erfolge als Dozent wurden bald bessere, insbesondere seitdem er neben Vorlesungen über Mineralogie solche über Physik hielt. Schon im Winter 1827—1828 las er Physik der Erde vor 25, daneben Mineralogie vor 4 Zuhörern; und in den folgenden Jahren fanden auch die mineralogischen Vorlesungen

[1]) In Neumanns Nachlaß fand sich die interessante Rede vor, mit welcher Jacobi 1832 seine Disputation pro loco ordinario einleitete. Sie ist 1901 von W. v. Dyck in den Berichten der Münchener Akademie, Bd. 31, wie in den mathematischen Annalen, Bd. 56, veröffentlicht.

mehr Zuspruch. Von seinen physikalischen Vorlesungen aus dem Ende der zwanziger Jahre seien noch erwähnt die über die physikalischen Eigenschaften der Mineralien (Winter 1828—1829) und Experimentalphysik (Winter 1829—1830), eine Vorlesung, die er später nicht wiederholt hat.

Inzwischen war Neumann gleichzeitig mit Dove im März 1828 zum Extraordinarius befördert, ein Vierteljahr nach Jacobi; letzterem war diese Beförderung schon im Dezember 1827 zu Teil geworden, und zwar entgegen dem Wunsche der Fakultät, deren meiste Mitglieder er sich durch seine Äußerungen zu Feinden gemacht hatte [1]).

Indessen war das Extraordinariat nur mit demselben Einkommen verbunden, das Neumann schon als Dozent bezogen hatte, so daß er nach wie vor in den kärglichsten Verhältnissen leben mußte. Erst das Jahr 1829 brachte eine Besserung; im Mai 1829 wurde er nach dem Tode von Hagen zum ordentlichen Professor der Physik und Mineralogie ernannt und erhielt eine Besoldung von 500 Talern. Er verdankte diese Beförderung, durch die er eine gesicherte Existenz gewann, vor allem den Empfehlungen Bessels, der in einem vom 7. Oktober datierten Briefe an den Unterrichtsminister v. Altenstein aufs wärmste für Neumann eintrat und dringend bat, diesem ein für seine Bedürfnisse hinreichendes Einkommen zu gewähren. Bessel sagt in dem Briefe [2]) von Neumann: „Sein Reichtum an Kenntnissen, die Umsicht, womit er seine wissenschaftlichen Untersuchungen führt, der Eifer und die Ausdauer, welche er darauf verwendet, sind so groß, daß ich sicher vorauszusehen glaube, daß er unter den mathematischen Physikern bald eine der ersten Stellen einnehmen wird.“ Weiterhin spricht er von Neumanns Bescheidenheit: „Mir selbst ist nur nach längerem Umgange gelungen, völlig deutlich zu erkennen, was Neumann zu leisten vermag; aber ich habe zugleich seinen Charakter erkannt, dessen Festigkeit sich auch darin zeigt, daß er der Versuchung, Privatunterricht zu erteilen, widersteht und vorzieht, wissenschaftlichen Untersuchungen seine Zeit allein zu widmen.“

[1]) Siehe L. Königsberger: Karl Gustav Jacob Jacobi, Leipzig 1904, S. 27 u. 56.

[2]) Der Brief ist vollständig abgedruckt bei Volkmann, S. 7—8; in den Erinnerungsblättern, S. 254—255.

Übrigens verließ Dove um dieselbe Zeit Königsberg und siedelte nach Berlin über.

Das Jahr 1829 brachte Neumann ein Wiedersehen mit seinen Berliner Freunden. In den Osterferien war er (zum ersten Male seit seiner Übersiedelung nach Königsberg) dorthin gereist. Eine Krankheit, die ihn befallen, verzögerte seine Rückkehr, so daß er im Sommer dieses Jahres keine Vorlesung halten konnte.

Noch in anderer Beziehung war das Jahr 1829 für ihn bedeutungsvoll. Am 28. Dezember verlobte er sich mit Florentine Hagen, der jüngsten Tochter seines Amtsvorgängers; ihre ältere Schwester war seit 1812 mit Bessel verheiratet. Neumann war der Familie Hagen schon zu Lebzeiten des Vaters nahe getreten, und bereits Ende 1828 scheint er den Wunsch gehegt zu haben, seine spätere Braut als Gattin heimzuführen. Er hielt indessen mit seinen Wünschen zurück, bis er eine sichere Stellung erreicht hatte. Am 29. April 1830 fand die Hochzeit statt. Der sehr glücklichen Ehe, die leider allzufrüh durch den Tod der Frau getrennt wurde, sind fünf Kinder entsprossen, von denen vier noch heute leben:

Carl Neumann, Professor der Mathematik in Leipzig, geb. 1832.

Ernst Neumann, emeritierter Professor der pathologischen Anatomie zu Königsberg, geb. 1834.

Julius Neumann, Professor der Nationalökonomie in Tübingen, geb. 1835.

Luise Neumann, die treue Pflegerin des Vaters und Verfasserin der Erinnerungsblätter, geb. 1837; sie wohnt in des Vaters Heimat, zu Joachimsthal in der Uckermark.

Ein vierter Sohn, Gustav Neumann, geb. 1838, ist 1876 als Regierungsbaumeister in Posen gestorben.

5. Die Jahre des wissenschaftlichen Schaffens und Neumanns Lehrtätigkeit.

a) 1830 bis 1840.

In den ersten Jahren seines Königsberger Aufenthaltes hat Neumann nichts durch den Druck veröffentlicht. Daß er auch in dieser Zeit nicht untätig war, bezeugt Bessel in dem oben

angeführten Brief an den Minister von Altenstein. Erst als nach seiner Verlobung die Schwermut, die ihn früher befangen, seine Neigung, sich von der Gesellschaft abzusondern, gewichen, als sich seine Gesundheit gebessert hatte, ging er daran, die Ergebnisse seiner Forschungen bekannt zu machen.

1830 veröffentlichte er in den Abhandlungen der Berliner Akademie eine größere Arbeit über das Kristallsystem des Albits. Diese Arbeit ist ein Muster dafür, wie man durch eingehende Diskussion und geschickte Kombination von Winkelmessungen zu möglichst genauen Resultaten gelangt; in ihr ist wohl zum ersten Male die Methode der kleinsten Quadrate auf kristallographische Messungen angewandt. Im nächsten Jahre erschienen neben einem kleineren Aufsatz kristallographischen Inhalts die wichtigen Untersuchungen über die spezifische Wärme der Mineralien und die spezifische Wärme des Wassers. In der ersten dieser Arbeiten zeigte er, welche Korrektionen man bei den nach der Methode der Mischung angestellten Beobachtungen anbringen muß, um zu exakten Ergebnissen zu gelangen. Die Korrektionen selbst werden der Theorie der Wärmeleitung und Wärmestrahlung entnommen. Seine Versuche gehören zu den ersten, in denen die erreichbare Genauigkeit wirklich erreicht ist. In dieser Arbeit wird ferner das Dulongsche Gesetz, nach dem das Produkt aus dem Atomgewicht der einfachen Körper und ihrer spezifischen Wärme eine konstante Größe ist, auf eine Reihe zusammengesetzter Körper ausgedehnt. Hinsichtlich der spezifischen Wärme des Wassers wies Neumann zuerst nach, daß dieselbe mit wachsender Temperatur zunimmt, nicht, wie frühere Beobachter gefunden, abnimmt.

Das Jahr 1832 brachte die wichtige und grundlegende Arbeit über die doppelte Strahlenbrechung. In ihr wurden zum ersten Male die Erscheinungen der doppelten Strahlenbrechung streng aus den Gleichungen der Elastizitätstheorie abgeleitet. Diese Ableitung führt zu einer von der Fresnelschen abweichenden Anschauung über die Lage der Schwingungsrichtung zur Polarisationsebene. Eine zweite Arbeit aus diesem Jahre ist der Theorie der Metallreflexion gewidmet; und zwar wird gezeigt, wie man auf Grund der Fresnelschen theoretischen Vorstellungen zu zwei einfachen Gesetzen gelangt, die alle bisherigen Beobachtungen umfassen.

Probleme der Optik und der Elastizitätstheorie beschäftigten Neumann neben solchen der Wärmelehre auch noch in den nächsten zehn Jahren. 1833 untersuchte er die Beziehungen zwischen den thermischen, optischen und kristallographischen Achsen des Gipses; 1834 stellte er in einer Arbeit über das Elastizitätsmaß kristallinischer Substanzen die Gesetze auf, nach denen sich die Kristallwinkel bei allseitigem oder einseitigem Druck ändern, und entwickelte eine Methode zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten von Kristallen, eine Frage, die vor ihm noch nie behandelt war. Daneben nahm er die Untersuchungen über die spezifische Wärme von neuem auf. Er bestimmte 1834 die spezifische Wärme einer Reihe zusammengesetzter Körper, freilich ohne die Resultate gleich zu veröffentlichen; ihre Publikation erfolgte erst im Jahr 1865 durch Pape. Er untersuchte ferner auf strengere Weise als früher die bei der Methode der Mischung anzubringenden Korrektionen, indem er von vornherein die Wärmeleitung in dem eingetauchten Körper berücksichtigte. Die zur Ableitung dieser Korrektionen erforderlichen Rechnungen sind in einer lateinisch geschriebenen und wohl wenig bekannt gewordenen Dissertation niedergelegt; sie ist bei Gelegenheit der Disputation veröffentlicht, die Neumann zum förmlichen Eintritt in die Fakultät oblag. Die Disputation selbst fand am 6. Mai 1834 statt. Opponenten waren Hermann Heinrich Haedenkamp (nicht Haidenkamp, wie auf der Dissertation steht) und Karl Wilhelm Bessel, während J. E. Czwalina Neumann bei der Verteidigung der Thesen unterstützte. Letztere lauteten:

1. Ne ad unum quidem phaenomenon luminis explicandum theoria sufficit a summo Newtono proposita.

2. Agitatis materiae particulis calor efficitur, neque ei materia quaedam sive substantia, quam caloricum nominant, tribuenda est.

Ein weiterer Aufsatz aus dem Jahre 1834 betrifft die optischen Achsen und die Farben zweiachsiger Kristalle im polarisierten Lichte. Darin wird der bis dahin schwankende Begriff der optischen Achsen eines zweiachsigen Kristalls festgelegt, und es werden verschiedene Formeln aus der Theorie der Doppelbrechung durch Einführung der Winkel zwischen der Wellennormale und den optischen Achsen vereinfacht. Die hier abgeleiteten Formeln finden ihre Anwendung in der Arbeit, die Neumann vorzugs-

weise in den Jahren 1833 und 1834 beschäftigte, nämlich bei der Ableitung der Gesetze der Kristallreflexion.

Schon 1834 waren seine Untersuchungen darüber abgeschlossen, doch zögerte er mit ihrer Veröffentlichung, weil er zuvor seine Formeln auch experimentell prüfen wollte. Erst im Dezember 1835 legte er die Abhandlung der Berliner Akademie vor, so daß ihre Resultate erst 1837, beim Erscheinen der Akademieabhandlungen für das Jahr 1835, allgemein bekannt wurden. Aus diesem Umstande entstand 1838 ein Prioritätsstreit mit Mac Cullagh, der nach ganz anderer Methode zu wesentlich denselben Resultaten gelangt war. Auf diesen Prioritätsstreit soll weiterhin im Anschluß an die ausführliche Besprechung der Abhandlung über Kristallreflexion näher eingegangen werden.

An die in Rede stehende große Arbeit schlossen sich im Jahre 1837 zwei weitere an, die der experimentellen Prüfung verschiedener in jener aufgestellten Formeln gewidmet waren. Zugleich wird darin ein neues photometrisches Verfahren zur Bestimmung der Intensität des von Kristallen reflektierten und gebrochenen Lichtes angegeben. Nebenbei wird gezeigt, wie sich die Cauchysche Ableitung der Formeln für Totalreflexion in der Neumannschen Reflexionstheorie gestaltet, und es wird eine Behauptung Cauchys über die Verstärkung des gebrochenen Lichtes bei Beginn der totalen Reflexion als unrichtig nachgewiesen.

Noch sind aus dieser Zeit (1835) mehrere kürzere Notizen über die Unsymmetrie der Farbenerscheinungen hemiprismatischer Kristalle, sowie Beobachtungen über die Änderung der Lage der optischen Achsen des Gipses mit der Temperatur zu erwähnen.

Auch mit magnetischen und elektrischen Untersuchungen beschäftigte sich Neumann schon in den dreißiger Jahren, insbesondere interessierten ihn die Gaussschen Arbeiten über Erdmagnetismus. Das Studium dieser führte ihn auf eine neue Eigenschaft der Laplaceschen Kugelfunktionen und damit auf eine neue einfache Methode zur Berechnung der in den Kugelfunktionen auftretenden Konstanten aus Beobachtungen.

War Neumann so während der dreißiger Jahre unermüdlich als Forscher tätig, so widmete er sich daneben mit größtem Eifer seinem akademischen Amte. Neben den Vorlesungen über

Mineralogie und Kristallographie, die er in ziemlich regelmäßigem Turnus wiederholte, zog er allmählich verschiedene Teile der theoretischen Physik in den Bereich seiner Lehrtätigkeit, so zu Beginn der dreißiger Jahre die Theorie des Lichtes und die analytische Wärmetheorie, gegen Ende dieses Zeitraumes die Kapillarität und die Elastizität. Eine weitere Vorlesung über theoretische Physik könnte besser als Einleitung in die theoretische Physik bezeichnet werden. Außerdem las er wiederholt über ausgewählte Kapitel der theoretischen Physik.

Von besonderer Bedeutung für Neumanns Wirksamkeit war die Gründung des mathematisch-physikalischen Seminars, die auf den von ihm und Jacobi gemeinsam gestellten Antrag 1834 erfolgte. Durch die Seminarübungen sollten die Studierenden zur Vertiefung ihrer Studien angehalten, vor allem aber zu selbständiger wissenschaftlicher Tätigkeit angeleitet werden. Diese Aufgabe hat das Seminar, das erste derartige Institut in Deutschland, jahrzehntelang in ausgezeichneter Weise erfüllt. In ihm haben zahlreiche Mathematiker und Physiker ihre Ausbildung gefunden; ihm ist neben den Vorlesungen Jacobis und Neumanns der Aufschwung zu danken, den in den dreißiger und vierziger Jahren das Studium der Mathematik und Physik in Königsberg genommen. — Die hohe Bedeutung des Seminars für das Studium der Physik wird es als gerechtfertigt erscheinen lassen, daß wir die Tätigkeit Neumanns als Leiter seiner Abteilung des Seminars weiterhin in einem besonderen Abschnitt ausführlich schildern.

Weiter mag hier noch aus seiner akademischen Tätigkeit seine Mitwirkung bei der Ehrenpromotion Jakob Steiners durch die Königsberger philosophische Fakultät (1833) erwähnt werden. (Vgl. L. Königsberger, Jacobi, S. 145.)

Über Neumanns äußeres Leben in dieser Zeit ist wenig zu sagen. Häuslich und einfach lebte er im Kreise seiner Familie, und nur klein war sein Umgangskreis. In den Ferien suchte er mit den Seinen Erholung und Stärkung seiner Gesundheit in einem Landaufenthalt, meist im Seebade Rauschen an der samländischen Küste. Zweimal verließ er Königsberg auf längere Zeit, einmal mit seiner jungen Frau im Herbst 1830 zum Besuch von Berlin, Dresden und der Sächsischen Schweiz, das zweite Mal allein zu einer größeren Studienreise im Jahre 1834. Auf dieser

Reise, die von Ende Juni bis in den November hinein dauerte, besuchte er Berlin, Dresden, Freiberg, Teplitz, Prag, Wien und Graz, das Salzkammergut und Berchtesgaden, München und Innsbruck. Von hier wurde eine Fußwanderung durch das Zillertal und über das Pfitscher Joch unternommen, dann das Fassatal besucht. Die weitere Reise führte ihn über den Brenner und Innsbruck nach Stuttgart zum Besuch der Naturforscherversammlung und von da in die Schweiz, wo er die Gotthardstraße bis zum Lago Maggiore durchwanderte, über den Simplon, die Grimsel und Grindelwald Bern erreichte, um über Basel und Heidelberg nach Berlin zurückzukehren. Seine Reiseerlebnisse hat er in einer längeren Reihe von interessanten Briefen geschildert, die an seine Frau gerichtet waren, und die in den Erinnerungsblättern (S. 300 bis 335) mitgeteilt sind. Auf dieser Reise, die ihm Erholung und Kräftigung seiner Gesundheit brachte, lernte er eine Reihe von Fachgenossen, Mineralogen und Physiker, persönlich kennen, auch erwarb er eine große Sammlung von Mineralien für den Staat zu einem verhältnismäßig sehr geringen Preise, da er größtenteils bei Bauern und Hirten einkaufte [1]).

Ein schwerer Schlag traf ihn Ende 1838 durch den Tod seiner Frau, die am 29. Dezember jenes Jahres einem Nervenfieber erlag. Der Verlust beugte ihn so nieder, daß er lange Zeit zu wissenschaftlichem Schaffen unfähig war. Noch im Herbst 1839 schreibt er an Weiss, daß sein Arbeiten langsam und unzusammenhängend von statten gehe [2]). Erst sehr allmählich gewann er seinen Lebensmut wieder und ging nun daran, früher begonnene Arbeiten fertig zu stellen.

b) 1840 bis 1850.

Neumanns Veröffentlichungen in der Zeit von 1840—1850 sind nicht so zahlreich wie in dem Jahrzehnt vorher, aber um so bedeutungsvoller ihrem Inhalt nach. Man wird Volkmann im allgemeinen zustimmen können, wenn er Neumanns Leistungen in den vierziger Jahren als den Höhepunkt seiner Forschung bezeichnet [3]); nur meine ich, daß Volkmann die vorher erwähnte

---

[1]) Erinnerungsblätter, S. 334.
[2]) Ebend., S. 343.
[3]) Volkmann, S. 18.

große Arbeit über Kristallreflexion zu niedrig einschätzt, wenn er von den optischen Arbeiten der dreißiger Jahre sagt, daß sie jenen Höhepunkt noch nicht kennzeichnen.

Die erste in dem zu besprechenden Jahrzehnt erschienene Arbeit gehört noch der Optik an. Sie betrifft die Gesetze der Doppelbrechung des Lichtes in komprimierten und ungleichförmig erwärmten unkristallinischen Körpern und ist im Jahre 1841 der Berliner Akademie vorgelegt. Ein Teil dieser Abhandlung ist jedenfalls schon 1838 oder noch früher verfaßt, wie aus einem Briefe Neumanns an Weiss vom Herbst 1839 hervorgeht. Dort heißt es [1]): Ich habe mehrere frühere Arbeiten vorgenommen und ausgearbeitet; darunter ist eine große Abhandlung „Theorie der doppelten Strahlenbrechung, welche durch Druck erzeugt wird“ ... Die im Titel genannten Erscheinungen waren bis dahin lediglich experimentell untersucht. Neumann ist der erste, der es unternahm, sich von dem Zustandekommen derselben Rechenschaft zu geben und eine mathematische Theorie derselben aufzustellen. Diese führte zu dem sehr bemerkenswerten Resultat, daß bei einer Kompression des Mediums die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes vergrößert, bei einer Dilatation vermindert wird. Mit seinen Rechnungen verband Neumann eine Reihe neuer Beobachtungen, auch knüpfte er an die theoretischen Ergebnisse eine Fülle wichtiger Anwendungen, die nicht allein optische Erscheinungen betrafen. Daß er seiner Entwicklung die alte Elastizitätstheorie zugrunde legte, nach der die elastischen Phänomene unkristallinischer Medien nur von einer Konstante abhängen, kann ihm nicht zum Vorwurf gereichen, da zu damaliger Zeit eine andere Elastizitätstheorie nicht existierte.

Die eben besprochene Arbeit ist die letzte, welche Neumann aus dem Gebiete der Optik veröffentlicht hat. Seine weiteren Forschungen betreffen die Elektrodynamik, speziell die Erscheinungen der Induktion.

Die Ergebnisse dieser Forschungen sind niedergelegt in zwei der Berliner Akademie 1845 bis 1847 vorgelegten und in deren Abhandlungen abgedruckten Arbeiten:

1. Die mathematischen Gesetze der induzierten elektrischen Ströme.

---

[1]) Erinnerungsblätter, S. 343.

2. Über ein allgemeines Prinzip der mathematischen Theorie induzierter elektrischer Ströme.

In der ersten dieser Arbeiten wird ein allgemeines Gesetz der linearen Induktion entwickelt, das die Intensität des induzierten Stromes numerisch zu bestimmen erlaubt, und aus dem sich alle bisher beobachteten Induktionserscheinungen als Folgerungen ergeben. Die Resultate betreffen nicht nur die elektrodynamische, sondern auch die elektromagnetische Induktion. In der zweiten Arbeit wird die Beobachtung auf solche Fälle ausgedehnt, in denen der Leiter seine Form ändert. Ferner werden alle Einzelergebnisse zu einem neuen allgemeinen Gesetz (Prinzip) zusammengefaßt. In einem Anhange wird zugleich das wichtige Neumannsche Potentialgesetz geschlossener Ströme abgeleitet.

Daß gerade diese Arbeiten von bleibendem Wert für die Wissenschaft sind, wird allgemein anerkannt. Voigt sagt von ihnen [1]), daß ihre Resultate selbst die Entwicklung der letzten Dezennien, die so manches früher anerkannte Gesetz zu Fall gebracht habe, siegreich überdauern.

Endlich ist aus dem Jahre 1848 eine im Crelleschen Journal erschienene Arbeit wesentlich mathematischen Inhalts zu erwähnen, die insbesondere eine wichtige neue Darstellung der Kugelfunktionen zweiter Art enthält, sowie Anwendungen der Kugelfunktionen auf das Potential eines Rotationsellipsoids und den magnetischen Zustand eines solchen.

Die vierziger Jahre bildeten nicht nur für die literarischen Leistungen Neumanns einen Höhepunkt, auch seine Lehrtätigkeit erreichte in dieser Zeit ihre Höhe, doch nicht eine Höhe, die überschritten wurde. Vielmehr blieben seine Lehrerfolge dauernd auf dieser Höhe bis zu dem Moment, wo er seine Lehrtätigkeit einstellte. Den Kreis der in den dreißiger Jahren gehaltenen Vorlesungen erweiterte er, indem er die Theorie des Magnetismus, die der elektrischen Ströme, die Hydrodynamik und später auch die Potentialtheorie darin einbezog und damit seine Lehrtätigkeit auf alle Teile der theoretischen Physik ausdehnte. Derartige Vorlesungen waren lange Zeit hindurch, bis in die sechziger Jahre hinein, an keiner anderen deutschen Universität zu finden. Kein Wunder daher, daß auch aus weiter Ferne

---

[1]) S. 17, 18.

junge Männer nach Königsberg kamen, um von ihm in die neue Disziplin eingeführt zu werden. Während Königsberg im vorigen Jahrhundert im allgemeinen eine reine Provinzial-Universität war, an der man kaum einen Studierenden fand, dessen Heimat nicht Ost- oder Westpreußen gewesen wäre, war das anders für die Studierenden der Astronomie, Mathematik und Physik. In den Vorlesungen über diese Disziplinen sah man neben den aus der Provinz Preußen stammenden Zuhörern solche aus allen Teilen Deutschlands, ja über dessen Grenzen hinaus, aus der Schweiz, aus Rußland, Ungarn und Galizien. Zum Teil waren das ältere Leute, die schon an anderen Universitäten ihre Studien abgeschlossen hatten, selbst Universitätslehrer befanden sich unter ihnen. Zuerst hatte Bessel Astronomen von weit her nach Königsberg gezogen, seit Mitte der dreißiger Jahre kamen Mathematiker und Physiker dazu, um Jacobi und Neumann zu hören. Seit Jacobis Scheiden von Königsberg im Jahre 1843 [1]), und nachdem Bessel 1846 gestorben, war es Neumann allein, der auch weiterhin, bis in die Mitte der siebziger Jahre, diese Anziehungskraft ausübte. Wenn neben ihm auch Richelot mit Eifer und Erfolg die Jacobische Tradition aufrecht erhielt, so wäre doch diesem allein ein großer Teil seiner Zuhörer nicht zugeströmt, wenn er nicht gerade neben Neumann gewirkt hätte.

Wenn so Neumann das Haupt einer besonderen Schule wurde, aus der eine Reihe von hervorragenden Gelehrten hervorgegangen ist, so verdankte er dies nicht allein dem Stoffe, den er in seinen Vorlesungen behandelte, sondern vor allem der meisterhaften Art seines Vortrages. Über diesen sagt Lothar Meyer in der Zueignung seiner „Grundzüge der theoretischen Chemie" (Leipzig 1890) an Neumann: „Haben Sie doch Ihren lernbegierigen Schülern in Ihren Vorträgen die Ergebnisse der mathematischen wie experimentellen physikalischen Forschung und die Wege, auf denen man zu ihnen gelangt, stets so klar und durchsichtig darzulegen verstanden, daß selbst dem mit geringem mathematischen Rüstzeug ausgestatteten Hörer alles so leicht verständlich, sich von selbst ergebend erschien, daß er sich kaum

---

[1]) Definitiv siedelte Jacobi erst im Herbst 1844 nach Berlin über; doch hat er schon seit seiner Erkrankung im Anfang des Jahres 1843 in Königsberg keine Vorlesungen mehr gehalten.

der Schwierigkeiten bewußt wurde, welche überwunden werden mußten, ehe diese klare Einsicht in den Zusammenhang der Dinge und Erscheinungen gewonnen werden konnte. Haben Sie es somit als eine hohe Aufgabe betrachtet, das Beste, was wir in Ihrem Fache wissen können, so darzustellen, als wäre es das allerelementarste Wissen, so nehmen Sie wohl auch freundlich ein kleines unscheinbares Buch entgegen, . . . ".

Und C. Neumann schildert in einer Mitteilung an Volkmann[1]) den Vortrag seines Vaters mit folgenden Worten:

„Was er selber in diesen Gebieten der Forschung in heißem Bemühen und harter Anstrengung errungen hatte, das wußte er in majestätischer Einfachheit, Anschaulichkeit und Klarheit in seinen Vorlesungen seinen Freunden und Zuhörern mitzuteilen.

„Die Zuhörer hingen an seinen Blicken und lauschten seinen Worten. Sie sahen sich vor einem begeisterten, aus den tiefsten Tiefen schöpfenden Lehrer."

Daß ein solcher Vortrag seine Wirkung auf die jugendlichen Gemüter der Zuhörer nicht verfehlte, daß die Begeisterung des Lehrers sich auch ihnen mitteilte, darf nicht wundernehmen. Aber nicht nur momentan die Schüler zu begeistern, verstand Neumann, er wußte ihr Interesse für die Wissenschaft in immer höherem Grade zu erregen und sie allmählich, insbesondere durch die Seminarübungen, zu eigener Forschung heranzuziehen; mit welchem Erfolge, dafür ist einer der hauptsächlichsten Zeugen G. Kirchhoff, der seine wissenschaftliche Ausbildung lediglich Neumann verdankte.

Neumanns hohe Bedeutung als Forscher und Lehrer wurde bald von seinen Kollegen gewürdigt. Eine besondere Ehrung von ihrer Seite wurde ihm dadurch zu Teil, daß, als im Jahre 1843 an der Königsberger Universität, der Albertina, das Wahlprorektorat eingeführt wurde, die erste Wahl auf Neumann fiel. In sein Amtsjahr fielen die Vorbereitungen zur Dreihundertjahrfeier der Universität.

Auch auswärtige Universitäten richteten um diese Zeit ihre Blicke auf Neumann und suchten eine so hervorragende Kraft für sich zu gewinnen. Im April 1841 erhielt er unter glänzenden äußeren Bedingungen einen Ruf nach Dorpat, und dieser

[1]) Volkmann, S. 38.

Ruf wurde nach der ersten Ablehnung im September desselben Jahres wiederholt. In demselben Jahre erging an ihn die Aufforderung, als Akademiker nach Petersburg überzusiedeln. Beide Stellen lehnte er ab; seine Vaterlandsliebe und der Wunsch, „seine Kinder nicht der Wohltat der Entwicklung und Erziehung im Sinne und Geist des preußischen Staates zu berauben“ [1]), hielten ihn in Königsberg fest. Er benutzte auch nicht die Gelegenheit, um sein damaliges Gehalt von 800 Talern zu verbessern, sondern machte erst nach definitiver Ablehnung der russischen Anerbietungen dem Ministerium von denselben Mitteilung.

Von Neumanns äußerem Leben aus den vierziger Jahren ist noch zu erwähnen, daß er im Jahre 1843 eine zweite Ehe mit Wilhelma Hagen, einer Cousine seiner ersten Frau, schloß und dadurch neuen Sonnenschein in sein häusliches Leben brachte.

In den Jahren 1845 bis 1849 hat Neumann einen lebhaften Briefwechsel mit Jacobi geführt, veranlaßt durch den Druck der vorher erwähnten ersten Arbeit über Induktion. Jacobi überwachte in Berlin den Druck, half Neumann bei der Korrektur und schlug ihm eine Reihe von kleinen Änderungen vor. Daneben werden in den Briefen, die zum Teil in Königsbergers Jacobi-Biographie (S. 355 ff.) mitgeteilt sind, die Vorschläge für die Besetzung der Besselschen Stelle besprochen, und weiter wird mehrfach erörtert, wie man G. Kirchhoff, der damals seine Studien in Königsberg beendet hatte, am besten fördern könne.

Das Jahr 1848 führte den sonst still für sich lebenden Gelehrten an die Öffentlichkeit. Energisch trat er neben anderen angesehenen Bürgern für die Sache der Ordnung ein, beteiligte sich an der Verwaltung der Stadt, wurde Mitglied der Bürgerwehr und trug insbesondere durch Einwirken auf die Arbeiter und Reden in ihren Versammlungen viel zur Beruhigung der aufgeregten Gemüter bei. Auch im folgenden Jahre nahm er an der politischen Bewegung und den Wahlkämpfen lebhaften Anteil.

c) 1850 bis 1875.

Mit Beginn des neuen Jahrzehnts nahm Neumann seine durch die politische Tätigkeit unterbrochenen Studien wieder auf

[1]) Erinnerungsblätter, S. 353.

und widmete sich von neuem mit voller Kraft seiner Lehrtätigkeit. Auf letztere verwandte er während des Semesters den größten Teil seiner Zeit. „Nur wenige seiner Zuhörer[1]) ahnten, wieviel Zeit ihr hochverehrter Lehrer ihnen opferte, wie groß die Masse der Arbeit war, die derselbe Tag für Tag auf seine Vorlesungen verwandte, und wie er — infolge dieser fast gar zu großen Hingabe an seinen Beruf — für die Fortsetzung seiner eigenen ihm doch so sehr am Herzen liegenden Forschungen sich mehr oder weniger auf die Zeit der Ferien beschränkt sah."

Durch die geschilderte gründliche Vorbereitung jeder einzelnen Vorlesung gelang es Neumann, seinem Vortrage die alte Frische und Lebendigkeit bis in das hohe Greisenalter zu bewahren und den früheren Lehrerfolgen immer neue und neue hinzuzufügen. Sehr groß war freilich die Zahl seiner Zuhörer nie; mehr als zwölf Studierende fanden sich nur selten in einer seiner Vorlesungen zusammen, meist waren es weniger; erst seit 1860 stieg diese Zahl, und seit Ende der sechziger Jahre wurde das zweite Dutzend überschritten.

Übrigens erscheinen diese Zahlen nur klein, wenn man sie mit den heutigen Verhältnissen vergleicht; für die damalige Zeit waren sie nicht gering. Dabei fällt noch ins Gewicht, daß Neumann stets seine Zuhörer dauernd zu fesseln wußte, daß sich ihre Zahl im Laufe des Semesters nie erheblich verringerte. Der Haupterfolg von Neumanns Lehrtätigkeit aber bestand darin, daß er es verstand, fast alle seine Schüler zu eigenen wissenschaftlichen Arbeiten anzuregen.

Noch einen Punkt möchte ich hier kurz erörtern. Wenn Neumann in seinen Vorlesungen fast nur die Theorie behandelte, so empfand er das selbst als eine Beschränkung, die er sich notgedrungen auferlegen mußte, weil ihm zuerst die Mittel zum Experimentieren ganz fehlten, später nur in unzureichendem Maße zu Gebote standen. Als Ideal schwebte ihm vor, ein Laboratorium zur Verfügung zu haben, um seine Zuhörer nicht nur in der theoretischen Behandlung physikalischer Probleme, sondern auch im Experimentieren gründlich auszubilden. Daß er diesem zweiten Teile seiner Aufgabe nicht in der von ihm gewünschten

---

[1]) Aus den schon oben zitierten Mitteilungen C. Neumanns; Volkmann, S. 38.

Weise gerecht zu werden vermochte, lag lediglich in dem Mangel an verfügbaren Mitteln. Alle seine Bemühungen, diesem Mangel abzuhelfen, scheiterten an der Ungunst der Verhältnisse.

Von den Resultaten seiner Forschungen hat Neumann seit dem Ende der vierziger Jahre nur wenig durch den Druck veröffentlicht, 1862 den Aufsatz über seine neue Methode der Wärmeleitungsfähigkeit und 1865, wie schon erwähnt, die bereits aus dem Jahre 1834 herrührenden Bestimmungen der spezifischen Wärme zusammengesetzter Körper. Der erstere Aufsatz enthält eigentlich nur eine kurze Übersicht über einige wichtige Ergebnisse seiner Arbeiten über Wärmeleitung, stellt aber diese Arbeiten keineswegs erschöpfend dar, wie überhaupt die Gesamtheit seiner Veröffentlichungen nur einen kleinen Bruchteil seines Lebenswerks bildet [1]).

Der Grund für diese Zurückhaltung wichtiger Forschungsresultate war ein doppelter. Einmal war es ihm nicht um Ruhm und äußeren Erfolg zu tun: „Das größte Glück", so sprach er sich aus, „ist doch das Finden einer neuen Wahrheit; die daran geknüpfte Anerkennung kann dem wenig oder nichts hinzufügen" [2]). Und in einem am 10. März 1862 an Radau gerichteten Briefe [3]) sagt er: „Die Ångströmsche Abhandlung hatte mich schon etwas aufgeschreckt, als ich Ihren Brief erhielt, weil sie mir eine Mahnung war, meine alten Arbeiten zusammenzustellen, was mir immer unangenehm ist." Das Unangenehme lag für ihn in der Unterbrechung der reinen Forschertätigkeit, zumal er diese, wie wir gesehen haben, schon der Vorlesungen wegen einschränken mußte. Die weitere Verfolgung seiner Gedanken lag ihm mehr am Herzen als die Ausarbeitung dessen, was schon abgeschlossen war. Dazu kam noch ein zweites. Viele seiner Entdeckungen teilte er in seinen Vorlesungen mit, jedoch, ohne daß er angab, daß sie von ihm herrührten. „Er sah", wie Voigt [4]) sich ausdrückt, „die Forschungsresultate als genügend verwertet an, wenn sie zur Bereicherung seiner Vorlesungen und Seminare und damit zu allseitiger Förderung und Anregung seiner Schüler dienten." Auch C. Neumann

---

[1]) Voigt, S. 3.
[2]) Derselbe, S. 3.
[3]) F. Neumann, Gesammelte Werke 2, 139.
[4]) Voigt, S. 3.

sagt[1]) mit etwas anderen Worten dasselbe und fügt hinzu, daß sein Vater in Prioritätsfragen Publikationen durch Vorlesungen für völlig äquivalent hielt mit Publikationen durch Druck. Ein anderer seiner Schüler ferner, H. Wild, beginnt einen in Zürich gehaltenen Vortrag mit den Worten[2]): „Herr Professor Neumann pflegt in seinen Vorlesungen über mathematische Physik soviel neue, sowohl rein theoretische, als auch messend beobachtende Untersuchungen, die er selbst sonst nirgends publiziert hat, mitzuteilen, daß ich es für eine Pflicht seiner Schüler halte, dieselben, wo es angeht, zu einer weiteren Öffentlichkeit zu bringen und so auch anderen nutzbar zu machen." Helmholtz endlich, der von 1849 bis 1855 als Professor der Physiologie in Königsberg wirkte, spricht davon, daß Sätze, die er selbst finde und gebrauche, entweder schon direkt in Neumanns Heften vorkommen, oder doch in sehr ähnlicher Gestalt[3]). Ein erheblicher Teil der Forschungsresultate Neumanns findet sich demnach in den Arbeiten seiner Schüler, wie in seinen jetzt gedruckt vorliegenden Vorlesungen. Manches ist wohl noch in seinen nachgelassenen Manuskripten enthalten; so bringt z. B. Bd. II der gesammelten Werke zwei noch nicht publizierte Manuskripte über die Methoden zur Bestimmung der spezifischen Wärme und der Wärmeleitungsfähigkeit. Vieles und dabei Wichtiges ist leider durch diese Art der Publikation ganz verloren gegangen; und bei manchem anderen läßt sich nicht mit Sicherheit entscheiden, wie weit es auf Neumann zurückzuführen ist. Insbesondere dürften viele Beobachtungen Neumanns verloren gegangen sein. Spricht er doch z. B. in dem schon erwähnten Briefe an Weiss vom Herbst 1839 von Arbeiten über Axinit und Hornblende, über Diopsid, über spezifische Wärme usw., mit deren Ausarbeitung er sich momentan beschäftige. Und wenn Neumann seine Abhandlung über das Kristallsystem des Albites als den ersten Teil bezeichnet, so kann man wohl annehmen, daß das Material auch für den zweiten Teil vorhanden war. Endlich ist auch von den Arbeiten über Wärmeleitung nur ein kleiner Teil veröffentlicht, und über seine Messungen

---

[1]) Erinnerungsblätter, S. 345.

[2]) Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 2, 213, 1857.

[3]) Vgl. L. Königsberger, Hermann v. Helmholtz 1, 178. Braunschweig 1902.

der Querkontraktion eines gedehnten Drahtes wird in den Vorlesungen über Elastizität nur eine kurze Mitteilung gemacht.

Von Neumanns äußerem Leben in der Zeit nach 1850 ist wenig zu berichten. Er lebte still für sich, lediglich seinen Studien und seiner Familie. Nur selten trat er in die Öffentlichkeit hinaus, so bei den Landtagswahlen 1863 und 1866, bei der ersten Wahl zum Norddeutschen Reichstage und bei der Feier der Siege 1870—1871.

Von den Sommerferien benutzte er stets einen Teil zu seiner Erholung. Diese hatte er früher am Ostseestrande in Rauschen gesucht; seit 1861 brachte er den Sommer meist im Schlesischen Gebirge zu. Auch das Hochgebirge hat er noch zweimal besucht, einmal 1860, wo er die Albertina bei der vierhundertjährigen Jubelfeier der Universität Basel vertrat und von Basel aus in das Berner Oberland reiste, und 1873, wo er, fast fünfundsiebzigjährig, nochmals durch das Zillertal bis nach Sterzing hinüberwanderte.

Erwähnenswert ist aus dem Jahre 1862 ein Gutachten über die Einführung des metrischen Maß- und Gewichtssystems, zu dem er von der Regierung aufgefordert war. Er betont darin, daß er die Notwendigkeit des Grundsatzes, wonach die Längeneinheit die Grundlage der Gewichtseinheit bilden müsse, nicht anerkennen könne. Er weist ferner auf den hohen wissenschaftlichen Wert hin, den die preußische Maßbestimmung durch die umfassenden Arbeiten von Bessel erhalten hat, und fügt hinzu, daß er es bedauern würde, wenn diese Maßbestimmung dem Bedürfnisse des bürgerlichen Verkehrs zum Opfer fiele. Zugleich wünscht er, daß der preußische Fuß, wenn er auch seine gesetzliche Geltung verlieren sollte, wenigstens für wissenschaftliche Zwecke konserviert werde.

6. Das Jubiläum. Letzte Lebenszeit.

Schon während der Zeit des rüstigen Schaffens hatten Neumanns Verdienste auch durch äußere Ehren, die ihm zuteil geworden, vielfache Anerkennung gefunden. Von seiten der preußischen Regierung wurde ihm im Laufe der Jahre eine Reihe hoher Orden (darunter 1860 der Orden pour le mérite) sowie 1858 der Geheimratstitel verliehen. Die medizinische Fakultät zu Königsberg ernannte ihn 1844 bei Gelegenheit des Universitätsjubiläums

zum Ehrendoktor; Korrespondent der Berliner Akademie wurde er schon 1833, auswärtiges Mitglied derselben 1858. Auch auswärtige Akademien und Gesellschaften der Wissenschaft schätzten es sich zur Ehre, Neumann zu ihrem Mitglied zu wählen: Göttingen, München, Wien, Petersburg, London, Paris, Rom, Bologna.

Alle diese Akademien vereinigten sich mit verschiedenen deutschen Universitäten sowie mit den Kollegen und früheren Schülern Neumanns, um am 16. März 1876 sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum festlich zu begehen. Zahlreiche Glückwünsche wurden ihm an diesem Tage dargebracht, darunter ein solcher von dem Kronprinzen von Preußen, ferner eine Reihe von Adressen, die Neumanns Verdienste feierten, sowie ein Album mit den Photographien seiner Schüler. Ferner wurde ihm eine größere von Kollegen und Schülern gesammelte Summe zur Gründung eines Stipendiums für Studierende der Physik überreicht, eine Gabe, die Neumann vor allen anderen erfreute. Auch der Bau eines wissenschaftlichen Laboratoriums wurde ihm bei dieser Gelegenheit fest zugesagt. Von den überreichten Adressen[1]) möge die folgende der Breslauer philosophischen Fakultät hier Platz finden.

Breslau, den 16. März 1876.

Hochverehrter Herr Jubilar!

„Der heutige Tag, welcher Ihre Freunde und Schüler in Königsberg um Sie versammelt, Ihnen mit dem Ausdrucke höchster Verehrung herzliche Glückwünsche auszusprechen, lenkt auch in räumlich entfernten, im Geiste nahen Kreisen die Gedanken zu Ihnen, auf daß sie mit Ihnen in der Erinnerung die vergangenen Zeiten durcheilen und sich an Ihrer segensreichen Wirksamkeit erfreuen, für welche auch wir uns Ihnen zu verehrungsvoller Dankbarkeit verbunden fühlen."

„Ein weites Gebiet der Naturwissenschaft erfuhr durch Ihre Arbeiten wesentliche Förderung; die verschiedensten Disziplinen bereicherte Ihr Scharfsinn und Ihr unermüdlicher Eifer mit wichtigen Entdeckungen und

---

[1]) Die Adresse der Berliner Akademie ist in den Erinnerungsblättern (S. 393—394) abgedruckt.

wertvollen Theorien. Schon vor jenem Tage, dessen fünfzigste Wiederkehr heute gefeiert wird, fanden Sie die Gesetze und Regeln, welche seitdem die Grundlage der Krystallographie bilden. Die Mineralogie förderten Sie durch spezielle Untersuchungen, welche noch jetzt den Forschern als Muster gelten. Der Chemie lieferten Sie durch Ihre Untersuchungen über die spezifische Wärme eins Ihrer wichtigsten Gesetze. Die Physik verdankt Ihnen die Kenntnis der mathematischen Gesetze der elektrischen Induktion; hauptsächlich durch Ihre Arbeiten erlangte man Klarheit über die Reflexion und Brechung, über die Polarisation und über die doppelte Strahlenbrechung des Lichtes. Doch es wäre vergeblich, die vielen Beiträge, welche diese Ihre bevorzugte Wissenschaft, und auch diejenigen, welche die reine Mathematik aus der Fülle Ihrer Gedanken erhielt, aufzuzählen. Die wahre Größe Ihrer Verdienste liegt bei allen diesen Arbeiten darin, daß in Deutschland Sie der ersten und besten einer waren, welche der Physik die mathematische Analysis dienstbar machten und sie von dem Standpunkte der bloßen Empirie zu dem Range einer exakten Wissenschaft erhoben."

„Die weite Ausdehnung des Gebietes Ihrer wissenschaftlichen Forschung macht es bei diesem Ihrem Jubelfeste mehr als bei anderen Jubiläen den philosophischen Fakultäten, welche die Gesamtheit der reinen Wissenschaften umfassen, zur Pflicht, Ihnen ihre Huldigung darzubringen. Doch noch größeren Anlaß haben diese nicht nur der Förderung, sondern besonders auch der Lehre der Wissenschaften dienenden Körperschaften, Ihnen heute glückwünschend zu nahen, wenn Sie Ihrer großen Erfolge als Lehrer gedenken."

„Keiner der lebenden Naturforscher und Mathematiker hat eine so große Zahl von Schülern gebildet, wie Sie durch die Klarheit Ihrer Vorlesungen zur Nacheiferung angeregt und begeistert, durch die freundliche Milde Ihrer väterlichen Führung und Anleitung an sich gefesselt und durch die stets bereite, bei jeder Schwierigkeit in aufopferndster Weise gewährte Hilfe in ihrem

Streben gefördert haben. Auch hier bei unserer Fakultät dienen der Pflege der Wissenschaft durch Vorlesungen und in Instituten sechs Ihrer ehemaligen Zuhörer, welche mit Stolz sich ihres geliebten Lehrers rühmen und in nie erlöschender Dankbarkeit sein Bild treu im Herzen bewahren."

„So versichert denn die unterzeichnete Fakultät Sie, hochverehrter Herr Geheimrat, ihrer unbegrenzten Verehrung nicht allein wegen der hervorragenden Verdienste, welche Sie als Forscher und Förderer der Wissenschaft sich erworben, sondern auch namentlich wegen Ihrer bewunderungswürdigen Erfolge als Lehrer, zu denen nur wahre Güte eines warmen Herzens fähig machen kann. Wir wünschen, es möge ein glückliches Geschick, das schon in Ihrer frühen Jugend der verderblichen feindlichen Kugel am heißen Tage von Ligny wehrte Ihr teures Leben zu zerstören, Ihnen dieselbe Gunst im Alter erweisen, der Parze noch lange verwehren Ihren Lebensfaden zu durchschneiden und Ihrem Alter eine Reihe glücklicher Jahre im Kreise einer glücklichen Familie hinzufügen.

Die Philosophische Fakultät der Universität Breslau:

Nehring, z. Z. Dekan. Elvenich. Löwig. Göppert. Grube. Stenzler. Roemer. Junkmann. Hertz. Galle. Rossbach. Schmölders. Schröter. C. Neumann. O. E. Meyer. Poleck. Dilthey. Magnus. F. Cohn. Brentano. Gröber."

Bis in sein 78. Lebensjahr hatte Neumann seine Lehrtätigkeit fortgesetzt und in den Wintersemestern regelmäßig gelesen, zuletzt im Winter 1875—1876. Wenn er nach dem Jubiläum das Ministerium bat, ihn von den regelmäßigen Vorlesungen und der Leitung des Seminars zu entbinden, so tat er dies nicht allein, weil er fühlte, daß seine Kräfte abnahmen, sondern vor allem, um mehrere angefangene wissenschaftliche Arbeiten noch beenden zu können und Fragen, die ihn früher beschäftigt hatten, zum Abschluß zu bringen [1]). Diesem Wunsche wurde entsprochen, und W. Voigt, Neumanns Schüler, trat an

[1]) Erinnerungsblätter, S. 395.

des letzteren Stelle. Neumann wollte seine Tätigkeit als Lehrer nicht ganz aufgeben, sondern nur beschränken; indessen hat er nur noch einmal, im Winter 1877—1878, eine Vorlesung angefangen, ohne sie beenden zu können. Mußte er aber notgedrungen auf akademisches Wirken verzichten, so noch nicht auf wissenschaftliches Arbeiten. Treu gehütet und gepflegt von seiner Tochter (seine zweite Frau war nach langem Siechtum im Winter 1877 gestorben), konnte Neumann in vollkommener geistiger Frische noch viele Jahre seiner Arbeit leben. In ihr fand er bis zuletzt seine Befriedigung. Veröffentlicht hat er von den Resultaten dieser Arbeiten allerdings nichts. Nur 1878 sind, von seinem Sohne C. Neumann herausgegeben, die wohl schon früher verfaßten Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen erschienen. Neben den mathematischen und physikalischen Studien beschäftigte er sich gern mit der Lektüre historischer Schriften; und an allem, was das Vaterland betraf, nahm er den lebhaftesten Anteil. Auch körperlich blieb er verhältnismäßig rüstig. Selbst die Folgen einer schweren Lungen- und Rippenfellentzündung, die ihn im Herbst 1884 in Hain im Riesengebirge befallen und während des ganzen Winters an das Bett gefesselt hatte, überwand er, wenn auch langsam, vollständig. Fast jeden Sommer noch suchte er das ihm seit Jahren liebgewordene Riesengebirge auf, und auch in Königsberg machte er täglich ein- bis zweistündige Spaziergänge.

So war ihm ein langer, ruhiger, heiterer und glücklicher Lebensabend beschert. Auch an äußeren Ehrungen fehlte es nicht; zum sechzigjährigen Doktorjubiläum wie zum neunzigsten Geburtstag wurden ihm hohe Orden verliehen, und 1894 wurde er bei der 350 jährigen Jubelfeier der Universität Königsberg zum Wirklichen Geheimrat mit dem Titel Exzellenz ernannt.

Neumann erreichte ein Alter von fast 97 Jahren. Er starb am 23. Mai 1895 nach kurzer Krankheit, tief betrauert nicht nur von seinen Angehörigen, seinen Schülern und Kollegen, sondern von der ganzen deutschen Wissenschaft.

7. Rückblick auf Neumanns Persönlichkeit.

Nachdem wir F. Neumanns äußeren Lebensgang verfolgt, dabei auf seine bedeutendsten wissenschaftlichen Leistungen hin-

gewiesen, auch seine hervorragende Wirksamkeit als Lehrer zu schildern versucht haben, sei es gestattet, noch kurz seiner eigenartigen Persönlichkeit zu gedenken. Wir haben gesehen, welche harte Jugend er verlebt, welchen bitteren Entbehrungen er als Student und noch später ausgesetzt war, wie er sich durch das alles nicht in seinem Streben, der Wissenschaft zu dienen, beirren ließ, sondern durch unablässiges, beharrliches Arbeiten das Ziel, das er sich gesteckt, erreichte. Und als er es erreicht, machte ihn das nicht stolz und hochfahrend. Die Bescheidenheit, die schon Bessel an ihm rühmte, zierte ihn sein Leben lang. Lediglich ein Ausfluß seiner Bescheidenheit war es, daß, wenn er in den Vorlesungen die Ergebnisse seiner eigenen Untersuchungen vortrug, mochten dieselben schon veröffentlicht sein oder nicht, er nie angab, daß jene Ergebnisse sein Eigentum seien, während er neben den Namen seiner großen Vorgänger, die er mit Begeisterung pries, gern mit einem gewissen Stolz die Namen seiner Schüler nannte, so oft er von deren Arbeiten berichtete. Auch die Einfachheit der Lebensführung, zu der er in der Jugend durch den Mangel an Mitteln gezwungen war, behielt er, nachdem er aus tiefster Dürftigkeit zu einem bescheidenen Wohlstand gelangt war, bei. Das trat zu Hause sowohl, wie auf Reisen zutage. „Ich habe es", schreibt er von der Reise 1834 an seine Frau [1], „hier in München zum ersten Male so gemacht wie die vornehmen Reisenden, in einem großen Hotel gewohnt, an der table d'hôte gespeist, das Merkwürdige der Stadt gesehen, spazieren gegangen usw., und ich finde nicht, daß man dabei mehr Vergnügen und Nutzen hat, als wenn man halb so viel ißt, trinkt und sieht; aber ich freue mich darauf, wenn ich erst, Innsbruck im Rücken, den Tornister auf dem Rücken, wandernd wie ein armer Teufel im Lande herumziehen werde. Da erst fühle ich mich frei und unabhängig, und es geht doch nichts über das Vergnügen, auf diese Weise bei einem schönen Morgen in den Tag hineinzumarschieren, und die Nacht, wenn man sich müde gegangen, ist so erquickend."

Neben dieser schlichten Einfachheit war ihm eine große Herzensgüte eigen. Für seine alten Berliner Freunde hatte er stets eine offene Hand; er unterstützte sie mit namhaften Summen,

---

[1]) Erinnerungsblätter, S. 328.

als ihm im Anfang der dreißiger Jahre eine kleine Erbschaft zugefallen war. Ja, einen alten Schulfreund und Kriegskameraden, Dulitz, der, wohl nicht ohne eigene Schuld, in eine traurige Lage geraten war, nahm er über neun Jahre lang als Gast in sein Haus. Dieselbe Güte zeigte er noch in hohem Alter armen Nachbarskindern gegenüber, die auf der Treppe seines Hauses spielten; nicht nur, daß er sie häufig mit kleinen Geschenken erfreute: um sie nicht in ihrem Spiel zu stören, wich er ihnen auf der Treppe aus, was für den Hochbetagten nicht ohne Gefahr war und ihm einmal einen schweren Sturz die Treppe hinunter zuzog.

Auch seinen Schülern war er, wenn sie ihm näher traten, ein warmer, väterlicher Freund, der sich ihrer in allen Angelegenheiten annahm und gern bereit war, alles, was in seinen Kräften stand, zu tun, um sie auch in ihrem Fortkommen zu fördern. Gewann er sich so die Herzen seiner Schüler, indem er ihnen menschlich näher trat, so war er ihnen andererseits ein Muster in der strengen Pflichterfüllung. Wie ernst er es mit seinem Beruf als akademischer Lehrer nahm, wie er auf diesen fast seine ganze Zeit verwandte, ist schon oben geschildert. Aber nicht nur in bezug auf seinen amtlichen Beruf, auch in allen anderen Lebensverhältnissen trat diese Pflichttreue hervor; sie trieb noch den 95 jährigen, stundenlang ohne Rücksicht auf seine Gesundheit in einem überfüllten Wahllokal auszuhalten, um seiner Pflicht als Wähler zu genügen, wie er von Jugend an die Erfüllung der Pflichten gegen das Vaterland allem vorangestellt hatte. Wie der 16 jährige, als das Vaterland rief, die Schule verlassen hatte, um in den Freiheitskrieg zu ziehen, so trat auch der Mann, wenn es galt, seine Vaterlandsliebe durch die Tat zu beweisen, aus seiner stillen Studierstube heraus, so in den Unruhen der Jahre 1848—1850, in den Wahlkämpfen der sechziger Jahre und 1866 und 1871, um die heimgekehrten siegreichen Truppen zu begrüßen. Vaterlandsliebe und Rücksicht auf die Pflichten, die er seinen Kindern schuldete, waren es auch, die ihn in Königsberg festhielten, als ihm zweimal glänzend dotierte Stellen in Rußland angeboten wurden. Der ideale Sinn, der sich hier in der Geringschätzung äußerer Vorteile dokumentierte, beseelte ihn sein Leben lang. Auch bei seinen Forschungen war es ihm nur um die Förderung der Wissenschaft, für die er begeistert war, zu tun,

nicht um irgend welchen Nutzen oder irgend welche Ehren, die für ihn daraus hätten erwachsen können. Daher sorgte er auch in späteren Jahren so wenig für das Bekanntwerden der Resultate seiner Arbeiten. Diesen idealen Sinn suchte er auch bei seinen Zuhörern zu erwecken und zu pflegen. Als Prorektor wies er wiederholt darauf hin, wie trostlos und unwürdig ein bloßes Brotstudium sei. Es sei die Aufgabe der Studierenden, sich auf der Universität jene geistige Freiheit und Unabhängigkeit des Denkens und Handelns zu erwerben und zu erarbeiten, welche aus einem treuen und eifrigen Studium der Wissenschaft hervorgeht, und gegründet ist in dem Bewußtsein, sich überall nur durch vernünftige Gründe, durch sittliche und wissenschaftliche Motive bestimmen zu lassen [1]). Und in demselben Sinne, wie hier auf die Allgemeinheit der Studierenden, suchte er stets auf seine speziellen Hörer zu wirken. Daß er das erreichte, zeigte sich darin, daß es unter diesen Hörern wohl kaum einen gab, der seine Studien lediglich mit Rücksicht auf das Examen getrieben hätte. So nahmen denn seine Schüler aus seinem Unterricht und dem Verkehr mit ihm mehr fort, als das, was sie in ihren Heften nach Hause trugen. Daß sie sich dessen bewußt waren, zeigen viele Briefe, die sie an ihren alten Lehrer oder nach seinem Tode an dessen Kinder gerichtet haben. Einer der Schüler schrieb im Jahre 1904 nach dem Erscheinen der Erinnerungsblätter an Fräulein Luise Neumann:

„Mein Leben wäre doch viel ärmer gewesen, wenn ich nicht das Glück gehabt hätte, eine Reihe von Jahren ihm zu Füßen zu sitzen und in ihm nicht nur das Ideal des Forschers und Lehrers, sondern auch des Menschen zu verehren."

Und ein anderer sagt:

„Von allen Menschen, mit denen mich das Leben in Berührung gebracht hat, wüßte ich keinen, dem ich eine so große Verehrung und Dankbarkeit entgegenbringe als ihm."

---

[1]) Erinnerungsblätter, S. 354.

Zweiter Teil.

Neumanns wissenschaftliche Arbeiten.

Es soll hier auf Inhalt und Bedeutung der von Neumann veröffentlichten Arbeiten, die im ersten Teil nur mit wenigen Worten skizziert werden konnten, näher eingegangen werden. Dabei sollen die verschiedenen Abhandlungen und Aufsätze nicht in chronologischer Reihenfolge, sondern nach dem Inhalt geordnet besprochen werden.

I. Die kristallographisch-mineralogischen Arbeiten.

1. Beiträge zur Krystallonomie. Von F. E. Neumann. 1. Heft. Mit 12 Tafeln in Steindruck. Berlin und Posen. Bei Ernst Siegfried Mittler, 1823.

Neumanns erste Veröffentlichung waren die „Beiträge zur Krystallonomie“. Die Bedeutung dieser Schrift liegt vor allem darin, daß in ihr eine neue Methode der Kristalldarstellung gelehrt wurde; eine Methode, die den Zusammenhang der Glieder eines Kristallsystems und ihre gegenseitigen Verhältnisse mit einem Blick erkennen läßt. Die Methode besteht darin, die verschiedenen Kristallflächen durch Punkte einer Ebene darzustellen. Zu dem Zwecke ziehe man die Flächennormalen, d. h. man fälle vom Mittelpunkt des Systems auf alle Kristallflächen Lote und verlängere diese bis zum Schnitt mit einer beliebigen Ebene (am einfachsten wird dazu die gerade Endfläche genommen), dann gibt die Gesamtheit der Schnittpunkte ein Bild von der Lage der verschiedenen Kristallflächen und ihren Beziehungen zueinander.

Statt auf eine Ebene, kann man in derselben Weise auch die Kristallflächen auf eine Kugel projizieren; man braucht nur die Schnittpunkte der Flächennormalen mit einer um den Mittelpunkt des Systems beschriebenen Kugel zu betrachten. Daß diese von späteren Mineralogen, namentlich von Quenstedt und W. Miller, vielfach angewandte und weiter ausgebaute Methode von Neumann herrührt, scheint bei manchen Mineralogen der Neuzeit in Vergessenheit geraten zu sein; die Entwicklung der Methode, ihre Anwendung auf spezielle Beispiele, sowie die Ableitung einer Reihe wichtiger Folgerungen nimmt etwa drei Viertel des, wie schon oben bemerkt, allein erschienenen ersten Heftes ein (S. 1—118).

Auf seine neue Projektionsmethode wurde Neumann durch die von Weiss begründete, von ihm selbst in den Beiträgen und späteren Arbeiten weiter ausgebildete Zonenlehre geführt. Eine Zone nennt Weiss den Inbegriff von Flächen, die alle eine Richtung gemeinschaftlich haben, die alle derselben Linie parallel sind. Gerade die Untersuchung der Zonen läßt nach Neumann den wahren Zusammenhang der Glieder eines Kristallsystems erkennen, und dieser Zusammenhang spricht sich aus in dem Zonengesetz, das darin besteht, daß in der Entwicklung der verschiedenen Glieder jedes spätere Glied bestimmt wird durch Zonen der früheren Glieder. Eine Zone ist durch zwei Flächen bestimmt, und weiter bestimmen zwei Zonen eine neue Fläche. Daher bietet sich zuerst die Aufgabe dar, den Ausdruck für eine Fläche zu finden, die durch zwei bekannte Zonen gegeben ist. Von dieser Aufgabe geht Neumann aus und zeigt, unter Benutzung der Weissschen Bezeichnung der Kristallflächen [1]), wie

[1]) Weiss unterscheidet vier Hauptabteilungen von Kristallen:

1. das gleichachsige (reguläre) System;
2. die zwei- und einachsige Abteilung (viergliedrige Systeme);
3. die ein- und ein- und einachsige Abteilung (zwei- und zweigliedrige Systeme), zu denen auch die zwei- und eingliedrigen, sowie die ein- und eingliedrigen Systeme als hemiedrische Gestaltungen gehören;
4. die drei- und einachsige Abteilung (sechsgliedrige Systeme), deren hemiedrische Formen die dreigliedrigen Systeme bilden.

Die drei ersten Abteilungen werden auf drei senkrechte Achsen bezogen und folgendermaßen bezeichnet. In der ein- und ein- und einachsigen Abteilung wird die in der Erscheinung vorherrschende

sich dieselbe durch bekannte Formeln der analytischen Geometrie des Raumes leicht lösen läßt.

„Aber", fährt er dann fort, „so einfach die Rechnung nun auch ist, so wird sie doch sehr lang und ermüdend, wenn es gilt, sowohl die Zonen alle zu kennen, die bis auf einen gewissen Punkt der Beobachtung sich entwickelt haben, als auch von jeder einzelnen Zone die Gesamtheit der Flächen, die sich in ihr ausgebildet haben, zu erfahren, und von jeder Fläche die Gesamtheit der Zonen, denen sie angehört, zu kennen. Es wäre eine sehr mühsame und lange Arbeit, den gedachten Forderungen im sphäroedrischen Systeme mit den doch nur wenigen beobachteten Flächen zu genügen. — Was aber die Hauptsache ist, so haben wir, wie alles nur einzeln und stückweise gewonnen ist, durchaus kein Bild dadurch von dem ganzen Zusammenhange und dessen Verkettungen und Verzweigungen erhalten, sondern müssen das Ganze des Resultates mehr dem Gedächtnis als der geometrischen Anschauung anvertrauen.

„Die ganze Betrachtungsweise und die Methode der mathematischen Behandlung vorliegenden Gegenstandes erleiden eine ungemeine Vereinfachung, wenn man statt auf die Flächen des Systems, mehr auf ihre Normalen, d. h. auf die Linien, die aus dem Mittelpunkte des Systems senkrecht auf die

---

Richtung c und von den zwei anderen Richtungen die kürzere a, die längere b genannt. In der zwei- und einachsigen Abteilung ist $a = b$, in der gleichachsigen $a = b = c$. Das Zeichen

$$\frac{1}{m} a : \frac{1}{n} b : \frac{1}{p} c$$

einer Fläche besagt, daß die Fläche gelegt werden muß durch $\frac{1}{m} a$, durch $\frac{1}{n} b$ und durch $\frac{1}{p} c$.

Die sechsgliedrigen Systeme werden auf vier Achsen bezogen, von denen drei, untereinander gleiche, in einer Ebene liegen und unter 60° gegeneinander geneigt sind, während die vierte auf jener Ebene senkrecht steht. Letztere Achse wird mit c, die drei anderen werden mit a bezeichnet und die drei mittleren, zwischen ihnen liegenden Richtungen mit s. Das Zeichen einer Fläche ist hier, indem die dritte Achse a fortgelassen wird:

$$\frac{1}{m} a \overset{c}{:} \frac{1}{n} a.$$

Flächen gezogen gedacht werden, die Aufmerksamkeit richtet.

„Von der rein mathematischen Seite ist diese Weise der Behandlung, daß für die Flächen ihre Normalen betrachtet werden, daß das eine in die Stelle des anderen gesetzt wird, gänzlich gerechtfertigt, und von der Seite der physikalischen Betrachtung scheint nach unserem jetzigen Standpunkte alles dafür zu sprechen, alle Verhältnisse, wie sie mit der Fläche auftreten, aufzulösen in Verhältnisse ihrer Normalen, alle Eigentümlichkeiten des Kristalls in den verschiedenen Richtungen als lineare Tätigkeiten derselben anzusehen. Denken wir z. B. an die Erscheinungen des Blätterdurchganges, der jeder Kristallfläche, mehr oder weniger hervortretend, entspricht, an die Lichtreflexion dieser Blätterdurchgänge u. a. m., so deutet dieses alles auf eine Tätigkeit, die senkrecht auf die Kristallfläche wirkt, d. h. in der Richtung ihrer Normale.

„Hiernach spricht der Begriff der Zone sich aus als der Inbegriff von möglichen Flächen, deren Normalen in einer Ebene liegen.

„Diese Ansicht der Zonen gibt uns ein Mittel, die Gesamtheit der Zonen und ihren Zusammenhang untereinander in einem geometrischen Bilde darzustellen. Verlängern wir nämlich alle Normalen, bis sie eine und dieselbe Ebene durchschneiden, so müssen alle die Durchschnittspunkte in einer geraden Linie liegen, die von solchen Normalen herrühren, die in einer Ebene liegen, und umgekehrt gehören alle Durchschnittspunkte, die in einer geraden Linie liegen, solchen Normalen zu, die in einer Ebene liegen, und deren Flächen also in eine und dieselbe Zone gehören. Es bedarf also zur Erforschung aller existierenden Zonen nur der Aufzeichnung der Durchschnittspunkte der Normalen mit einer Ebene auf diese, und wir werden uns bald überzeugen, daß dieses sowohl eine sehr einfache Operation ist, als daß es auch bei der Aufzeichnung keiner geometrischen Genauigkeit bedarf, um mit bloßen Augen oder mit Hilfe eines Lineals alle existierenden geraden Linien herauszufinden.“

Es wird dann auseinandergesetzt, wie diese Durchschnitte auf der geraden Endfläche des Systems zu entwerfen sind, da sich für diese das Verfahren am einfachsten gestaltet. Man ziehe auf der geraden Endfläche

$$\infty a : \infty b : c$$

zwei senkrechte Linien parallel den Kristallrichtungen a und b. Auf diese als Achsen bezogen, hat der Punkt, der die Fläche

$$\frac{1}{m} a : \frac{1}{n} b : c$$

repräsentiert, die Koordinaten $\frac{mc^2}{a}$, $\frac{nc^2}{b}$. Ist die Projektionsebene nicht die gerade Endfläche selbst, sondern eine zu ihr im Abstand 1 vom Mittelpunkt gelegte Parallelebene, so sind die Koordinaten $\frac{mc}{a}$, $\frac{nc}{b}$; in beiden Fällen ist der Anfangspunkt der Koordinaten der Ort der geraden Endfläche selbst. Das Verfahren wird erläutert durch die Projektion der gewöhnlich am Schwerspat zu beobachtenden Flächen, und es wird dabei gezeigt, wie man den Zusammenhang der Glieder in dem Bilde mit einem Blick übersehen kann. Ebenso einfach ist das Verfahren bei den sechs- und dreigliedrigen Systemen, was am Quarz erläutert wird. Zum Schluß wird das Schema des regulären Systems auf der Würfelfläche entworfen.

Im zweiten Abschnitt (S. 19—51) wird ein „Verfahren, die Neigungsverhältnisse in den Zonen im vorliegenden Schema zu finden“, dargelegt. Unter der Voraussetzung, daß $a^2 : b^2 : c^2$ ein rationales Verhältnis haben, eine Voraussetzung, die Neumann als mit der Erfahrung übereinstimmend ansieht, wird durch einfache analytisch-geometrische Betrachtungen das Resultat abgeleitet: Die Tangenten der Neigungswinkel der verschiedenen in derselben Zone gelegenen Flächen gegen die in dieser Zone liegende Säulenfläche sind rationale Vervielfachungen eines und desselben irrationalen Grundverhältnisses. Dasselbe gilt dann, wie leicht zu übersehen, für die Neigungswinkel zweier beliebiger Flächen derselben Zone. Jenes irrationale Grundverhältnis ist das Verhältnis der Zonenachse zum Produkt der drei Dimensionen des Systems. Dabei wird die Zonenachse folgendermaßen definiert: Durch die Zonenlinie des Schemas und den Mittelpunkt (d. i. den Punkt, von dem aus die Lote auf die Kristallflächen gefällt sind) ist die Zonenebene bestimmt. Das auf letzterer im Mittelpunkt errichtete Lot ist die Zonenachse, ihre Länge das Stück zwischen Mittelpunkt und Projektionsebene. Über die Be-

deutung des Resultates spricht sich Neumann selbst folgendermaßen aus:

„Aus dem Gesetz der Zonen, dem Grundgesetz aller kristallonomischen Entwicklung und Ausbildung, ergibt sich ein zweites nicht weniger wichtiges und allgemein gültiges Gesetz für die Kristallonomie: den Verhältnissen von Sinus zu Kosinus für alle kristallonomische Neigungen in derselben Zone liegt ein gemeinschaftliches irrationales Verhältnis zugrunde, von welchem irrationalen Verhältnis jedem besonderen Neigungsverhältnis eine rationale Vervielfachung entspricht.

„So sind für die Betrachtung dieser Verhältnisse diese zwei Teile derselben wesentlich getrennt, ihr gemeinschaftliches irrationales Grundverhältnis, und die rationalen Vervielfachungen desselben, und gerade in dieser Trennung stellen sich diese Verhältnisse auf unserem Schema dar."

Übrigens wird nicht gleich das allgemeine Resultat, das für alle Kristallsysteme galt, an die Spitze gestellt, sondern der Satz wird zuerst an einigen Beispielen erörtert. Zur Erläuterung dienen Topas und (für die sechs- und dreigliedrigen Abteilungen) Rotgültigerz.

Der zweite Abschnitt schließt mit einer Erläuterung der von Neumann auf Grund seines Systems eingeführten Zonenbezeichnung. Eine Zone wird bezeichnet durch Angabe der Stücke, welche sie auf den Achsen der Projektionsebene abschneidet $[M\alpha : N\beta]$, und zwar werden diese Stücke angegeben als Vielfache oder Teile von $\alpha = \frac{c}{a}$, $\beta = \frac{c}{b}$, falls die Projektionsebene den Abstand 1 vom Mittelpunkt hat. Geht die Zonenlinie durch den Anfangspunkt (ist sie also einer vertikalen Zone angehörig), so wird ihre Lage bestimmt durch das Verhältnis der Lote, die von einem ihrer Punkte auf die Achsen gefällt sind; zum Unterschied von anderen Zonen wird dem Verhältnis das Zeichen 0 vorgesetzt. Auch diese Bezeichnung wird am Topas erläutert, die auftretenden Zonen in Zonengruppen geordnet. Ferner wird gezeigt, wie man aus der Bezeichnung der Zone ihre wesentlichste Eigenschaft ablesen kann, „nämlich ihr irrationales Grundverhältnis, diejenige Eigenschaft, deren weiteres Studium die größte Fruchtbarkeit für die Kristallonomie verspricht". Endlich

wird das Verhältnis von Neumanns Zonenbezeichnung zu der von Weiss erörtert.

Der dritte Abschnitt (S. 51—78) behandelt die Neigungsverhältnisse in den Flächen und legt dar, wie man diese aus dem Schema findet. Sehr einfach erledigt sich das für die gerade Endfläche, wenn man bedenkt, daß die Linie, die in dem Schema von dem Orte der geraden Endfläche nach einem anderen Flächenorte gezogen ist, senkrecht steht auf der Richtung, in der die gerade Endfläche von jener anderen Fläche geschnitten wird. Schneiden daher zwei Flächen f_1, f_2 die gerade Endfläche in den Linien l_1, l_2, so ist der von l_1, l_2 gebildete Winkel das Supplement desjenigen Winkels, den im Schema die Verbindungslinien der Flächenorte von f_1 und f_2 mit dem Flächenorte der geraden Endfläche bilden; und die Tangente des letzteren Winkels folgt sofort aus dem Schema.

Um die analoge Aufgabe für andere Kristallflächen zu lösen, ohne erst die Projektion auf diesen anderen Flächen zu entwerfen, benutzt Neumann die Projektion auf die Kugel und leitet mittels derselben folgendes Resultat her: Eine beliebige Kristallfläche f werde von zwei anderen Kristallflächen f_1, f_2 in den Kanten k_1 und k_2 geschnitten, und ϑ sei das Supplement des von k_1, k_2 eingeschlossenen Winkels. Andererseits verbinde man in dem auf der geraden Endfläche entworfenen Schema den Flächenort von f mit dem Flächenorte von f_1 und f_2 und nenne den von diesen Verbindungslinien eingeschlossenen Winkel ϑ', so ist $tang\,\vartheta = tang\,\vartheta' \cdot \frac{c}{l}$, wo l das vom Mittelpunkt des Kristalls auf die Fläche f gefällte Lot bezeichnet. Das Verhältnis $tang\,\vartheta : tang\,\vartheta'$ ist also lediglich von der Lage von f abhängig, nicht aber von der von f_1 und f_2. Beachtet man ferner das Gesetz der rationalen Indizes und setzt voraus, daß a^2, b^2, c^2 zueinander in rationalem Verhältnis stehen, so folgt, daß die Tangente eines beliebigen, in der Fläche f gelegenen Kantenwinkels stets durch Multiplikation des irrationalen Verhältnisses $\frac{abc}{l}$ mit einer rationalen Zahl erhalten wird. Das gemeinschaftliche irrationale Verhältnis $\frac{abc}{l}$, bzw. dessen reziproken Wert nennt Neumann das Grundverhältnis der Fläche f.

Dem allgemeinen Beweis des vorstehenden Resultats geht wiederum die Erläuterung desselben an einem speziellen Beispiel, und zwar dem Vesuvian, voraus, während zur Erläuterung für das drei- und sechsgliedrige System auch hier Rotgültigerz dient. Neumann schließt (§ 37): „So ist die Einfachheit der Methode für die Hauptfragen der kristallographischen Betrachtung, glaube ich, vollkommen gewonnen. Besonders wichtig und für weitere Untersuchungen fruchtbar ist die Unterscheidung der irrationalen Grundverhältnisse von ihren rationalen Vervielfachungen; jene sind das einem bestimmten Kristallsysteme Eigentümlichste, Individuellste, diese sind abhängig von dem allgemeinen Entwicklungsgange der Glieder eines Systems. In Hinsicht der irrationalen Grundverhältnisse, sowohl der Zonen als der Flächen, können wir nun das Gesetz derselben allgemein aussprechen: Das irrationale Grundverhältnis irgend zweier aufeinander senkrecht stehender Richtungen ist in derselben Ebene, diese sei eine Zonenebene, oder eine Kristallfläche, immer dasselbe, und dieses Verhältnis ist immer das irrationale Verhältnis des Produkts der drei aufeinander senkrecht stehenden Dimensionen des Systems zu der auf der Ebene senkrecht stehenden Richtung. Alle Grundverhältnisse eines Kristallsystems sind Grundverhältnisse der Richtungen zu den drei aufeinander senkrecht stehenden Dimensionen."

Hiernach hat man auch ein Urteil über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit von Winkelverhältnissen gewonnen. Im regulären System z. B. sind nur solche Neigungen möglich, deren Tangenten Vielfache (bzw. rationale Teile) von Quadratwurzeln aus der Summe dreier Quadrate sind. Auch für den Quarz lassen sich die möglichen Flächengrundverhältnisse leicht angeben.

Bisher war lediglich die Projektion der Kristallflächen auf die gerade Endfläche betrachtet, denn die Projektion auf die Kugel wurde im Abschnitt 3 nur nebenbei als Hilfsmittel benutzt, und im allgemeinen wird man auch wegen der größeren Einfachheit des Verfahrens die gerade Endfläche als Projektionsebene beibehalten. Indessen können besondere Verhältnisse Veranlassung geben, eine andere Kristallfläche zur Projektionsebene zu wählen. Es bleibt daher noch die Aufgabe zu behandeln, die Projektion der Flächenorte auf jeder kristallonomischen Fläche zu entwerfen.

Diese Aufgabe wird im vierten Abschnitt (S. 78—115) zunächst analytisch gelöst. Zur Darstellung einer Fläche

$$\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c$$

kommen nur die Projektionen der Flächennormale (des vom Mittelpunkt des Kristalls auf die Fläche gefällten Lotes) auf drei neue senkrechte Achsen in Betracht, deren eine auf der neuen Projektionsebene senkrecht steht. Nun sind die Projektionen der Normale auf die Kristallachsen a, b, c proportional $\frac{m}{a}$, $\frac{n}{b}$, $\frac{p}{c}$; aus diesen die Projektionen derselben Normale auf drei andere, der Lage nach bekannte rechtwinklige Achsen zu finden, ist eine einfache Aufgabe der analytischen Geometrie (bzw. der Mechanik, wie Neumann sagt, indem er $\frac{m}{a}$, $\frac{n}{b}$, $\frac{p}{c}$ als Kräfte betrachtet, die die Flächenrichtung bestimmen). Allerdings erfahren die allgemeinen geometrischen Formeln hier dadurch eine Modifikation, daß die neuen Achsen nicht eine ganz beliebige Lage haben, sondern kristallonomische Richtungen sein müssen. Nachdem die resultierenden Formeln auf das Augitsystem angewandt sind, entwickelt Neumann eine rein graphische Lösung, die er zunächst am Borax erläutert. Allgemein braucht man für die neue Projektion nur wenige Flächenorte (bei zweckmäßiger Wahl drei oder vier) direkt zu ermitteln; und dazu benutzt man die aus den früheren Abschnitten bekannten Tangenten für die Neigung der Normale, die dem zu fixierenden Flächenorte angehört, gegen die Normale, auf deren Fläche der Ort fixiert werden soll. Sind so die ersten Flächenorte auf der jedesmal vorliegenden Fläche bestimmt, so ist es nur noch nötig, das System von Zonenlinien, das die Projektion auf die gerade Endfläche geliefert hat, auf die neue Fläche zu übertragen. Aus der geometrischen Bestimmung der Flächenorte ergibt sich leicht auch ihre numerische. Nicht immer ist die neue Projektionsebene von vornherein gegeben. Stellt man sich z. B. die Aufgabe: „es sind zwei Flächen gegeben, der Kristall soll so gestellt werden, daß diese Säulenflächen werden, und es soll die Projektion der Flächenorte auf der geraden Endfläche dieser Säule entworfen werden“, so muß man zunächst das Zeichen jener geraden Endfläche bestimmen. Das Verfahren

wird an einer Reihe von Beispielen erläutert und dann angewandt, um die Projektionen der Flächenorte des regulären Systems auf verschiedenen Flächen dieses Systems zu entwerfen (§ 46—48).

In einem Anhange (S. 115—118) macht Neumann einige Bemerkungen über die Stellung und Umkehrung seiner Methode. Er betrachtet den Begriff der Invertierung, auf den Hauy bei den Gliedern des Kalkspatsystems aufmerksam gemacht hat, von einem allgemeineren Gesichtspunkte. Er nennt zwei Systeme invertiert, wenn sich bei dem einen $a:b:c = \sqrt{m}:\sqrt{n}:\sqrt{p}$, bei dem anderen $a:b:c = \sqrt{\frac{1}{m}}:\sqrt{\frac{1}{n}}:\sqrt{\frac{1}{p}}$ verhalten. Bei zwei invertierten Gestalten sind dann die Zonenebenen der einen die Flächen der anderen und umgekehrt. Dieser Begriff nun kann dazu dienen, um mit kurzen Worten das Verhältnis von Neumanns Behandlung der kristallonomischen Verhältnisse zu der bis dahin herrschenden anzugeben: erstere ist die invertierte von der letzteren. Man kann daher auch der im vorstehenden entwickelten Projektionsmethode eine andere an die Seite stellen, in der nicht die Flächenorte, sondern die Zonenebenen durch Punkte schematisch dargestellt werden.

Dies der Inhalt des umfangreichsten und wichtigsten Teils der Beiträge, die außerdem noch eine zweite Abhandlung, S. 119—152, enthalten: „Über den eigentümlichen Entwicklungsgang der zwei- und eingliedrigen Systeme in Beziehung auf ihren Zonenzusammenhang“. Anknüpfend an die Beobachtung von Weiss am Feldspat, wird hier die Beziehung und die Zonenabhängigkeit aller Glieder eines zwei- und eingliedrigen Systems von einer doppeltdreiseitigen Pyramide nachgewiesen, in der zwei Flächen gleich geneigt gegen die dritte sind, aber verschieden gegeneinander. Die Betrachtung des Zonenzusammenhangs führt auf diese Pyramide als die einfachste Gestalt. Zugleich wird auch eine naturgemäße Beziehung der Glieder auf ein schiefes Oktaeder dargelegt. Außer am Feldspat werden die analogen Verhältnisse auch am Pistazit erörtert.

Die Abhandlung enthält zugleich eine Polemik gegen Mohs, der die Ansicht verfochten hatte, daß die zwei- und eingliedrigen Systeme dadurch entständen, daß die Hälfte gleichartiger Flächen zwei- und zweigliedriger Systeme fortfiele. Dem widerspricht

nach Neumanns Ansicht die Natur auf das bestimmteste; die zwei- und eingliedrigen Systeme seien vielmehr der Ausdruck für das Einsetzen einer Verschiedenheit zwischen zwei sich gegenüber stehenden gleichen Seiten der letzteren Systeme (vgl. auch S. 51—52). Nebenbei wird gezeigt, daß nach der Methode von Mohs jede Fläche im allgemeinen mit vier verschiedenen Zeichen bezeichnet werden kann.

Auch in dieser zweiten Abhandlung leistet die neue Projektionsmethode wesentliche Dienste.

2. De lege zonarum principio evolutionis systematum crystallinorum. Dissertatio inauguralis. Berolini 1826[1]).

In engem Zusammenhange mit den Beiträgen steht Neumanns Dissertation. In derselben wird folgendes ausgeführt. Gegenüber der Ansicht mancher Mineralogen, wie z. B. Mohs, die das Gesetz der rationalen Indizes als das eigentliche Grundgesetz der Kristallographie ansehen, aus dem der Zonenverband der verschiedenen Kristallflächen erst folge, verficht Neumann die Ansicht, daß das Zonengesetz das grundlegende ist. Aus ihm ergebe sich nicht nur das Gesetz der rationalen Indizes als Folgerung, sondern das Zonengesetz, nach dem eine Kristallfläche nur dann entstehen könne, wenn gewisse in ihr liegende Richtungen schon vorher vorhanden sind, bilde die wahre Grundlage für die Entwicklung eines Kristallsystems. Aus dem Prinzip der Zonen folge ganz allgemein der Zusammenhang und die Aufeinanderfolge der verschiedenen Glieder eines Kristallsystems; doch nicht so, daß immer ein Glied aus dem vorhergehenden entstände; vielmehr könnte es nach dem Zonengesetz sehr wohl Glieder eines Systems geben, die keinen direkten Zusammenhang besäßen, während doch beide aus den früheren Gliedern des Systems mit Notwendigkeit folgen. Wesentlich sei die Unterscheidung der früheren (ursprünglichen) und der aus diesen sich ergebenden späteren Flächen.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen, die den Inhalt der Einleitung bilden, entwickelt Neumann systematisch, wie man bei den verschiedenen Kristallsystemen aus den einfachsten Flächen mittels des Zonengesetzes die kompliziertereren ableiten kann. Er

[1]) Die der Dissertation beigefügten Thesen sind schon im ersten Teile (S. 13) mitgeteilt.

benutzt dabei nicht die Projektion, sondern nur die in seinen Beiträgen zur Kristallonomie aufgestellten Formeln 1. über die Bestimmung des Zeichens der Zone, der zwei gegebene Flächen angehören, 2. über die Bestimmung des Zeichens einer Fläche aus zwei gegebenen Zonen.

Zuerst wird das reguläre System behandelt. Die Grundformen bilden das reguläre Oktaeder und der Würfel. Durch zwei Zonen, die eine Oktaederkante und eine Würfelkante zur Achse haben, sind die Flächen des Rhombendodekaeders (Granatoeders) bestimmt. Letzteres hat mit dem Oktaeder und dem Würfel die Eigenschaft gemein, daß keiner dieser Körper aus sich allein neue Flächen erzeugen kann, sondern, daß das nur durch Verbindung zweier der genannten Formen möglich ist. Je nachdem das Granatoeder mit dem Oktaeder oder mit dem Würfel verbunden wird, entstehen verschiedene Reihen von Formen. Eine Granatoeder- und eine Würfelfläche bestimmen die Zone, die eine Oktaederkante zur Achse hat; nimmt man diese Zone mit der einer Granatoederkante zusammen, so ergibt sich das Leucitoeder

$$\tfrac{1}{2}a : a : a.$$

Faßt man andererseits eine Granatoeder- und eine Oktaederfläche zusammen, so ergibt sich dadurch die sogenannte Diagonalzone des Oktaeders (Zeichen $[2a, a, a]$), und zwei derartige Diagonalzonen bestimmen eine Fläche des gewöhnlichen Pyramidenwürfels

$$a : \infty a : \tfrac{1}{2}a,$$

zwei andere das stumpfere Leucitoid. $[\frac{1}{3}a : a : a]$. Außerdem entstehen aus diesen Zonen und denen der Granatoederkanten zwei Hexakisoktaeder $[a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a]$ und $[a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a]$. Neumann nennt sie das gewöhnliche Pyramidengranatoeder und das zweite Hexakisoktaeder.

Von der überaus großen Zahl von Formen, die aus den eben besprochenen hervorgehen, indem man sie miteinander oder mit den vorhergehenden verbindet, untersucht Neumann genauer 1. diejenigen Formen, die aus der Verbindung des Leucitoeders mit den vorhergehenden Formen, das ist mit Oktaeder, Würfel, Granatoeder, entstehen; 2. diejenigen, die aus der Verbindung des gewöhnlichen Pyramidenwürfels mit Oktaeder, Würfel oder Granatoeder entstehen. Die Resultate (31 Flächen ad 1, 36 ad 2) sind in einer Tabelle zusammengestellt.

Eine analoge Untersuchung wird nun für das viergliedrige (quadratische) System (systemata quaternaria, nach Weiss zwei- und einachsige Abteilung) durchgeführt, und zwar werden nur die Formen entwickelt, bei deren Entstehung die gerade Endfläche fehlt. An Stelle der drei Grundgebilde des regulären Systems, des Oktaeders, des Würfels und des Granatoeders, treten hier: das Quadratoktaeder $[a:a:c]$, die erste Seiten-(Prismen-)fläche $[a:\infty a:\infty c]$, die zweite Seiten-(Prismen-)fläche $[a:a:\infty c]$[1]. Aus diesen ergeben sich das erste spitzere Oktaeder $[a:\infty a:2c]$ und das Dioktaeder $[a:\frac{1}{3}a:c]$ [Neumann nennt es solidum quaterno-marginatum vulgare][2]. Erörtert wird dann, welche neuen Formen aus den beiden letztgenannten durch Verbindung jeder derselben mit den drei vorhergehenden entstehen. Die Resultate sind wiederum zu einer Tabelle vereinigt.

Es folgt eine kurze Betrachtung des zwei- und zweigliedrigen Systems (rhombisch in moderner Bezeichnung) sowie dessen Primärformen, und zum Schluß wendet sich die Betrachtung dem zwei- und eingliedrigen System (modern monoklinisch) zu. Es würde zu weit führen, hier auf die Einzelheiten dieser Entwicklung einzugehen. Es sei nur Neumanns prinzipielle Auffassung hier hervorgehoben und zwar mit folgenden, den Beiträgen zur Kristallonomie entnommenen Worten: „In jeder der Richtungen in den zwei- und zweigliedrigen Systemen sind durch ihre Beziehungen zu den zwei anderen ungleichen Richtungen immer zwei gegenüberstehende Seiten gleich, und verschieden von den zwei anderen sich gegenüberstehenden Seiten. Tritt nun eine Verschiedenheit ein zwischen zwei sich gegenüber stehenden gleichen Seiten, so daß dieselbe Verschiedenheit auch in den zwei Enden derselben Seiten stattfindet (wodurch die Gleichheit der zwei Enden der Richtung nicht aufgehoben wird), so wird zugleich dasselbe Verhalten in den Seiten der anderen Richtung, die jenen Seiten zugekehrt sind, gefordert, und der räumliche Ausdruck dieses Verhaltens in den Seiten

---

[1]) Die Bezeichnung weicht von der anderer Autoren ab. So ist z. B. in Roses Elementen der Kristallographie, Seite 72, die Fläche $[a:\infty a:\infty c]$ als Prisma zweiter Ordnung, $[a:a:\infty c]$ als Prisma erster Ordnung bezeichnet.

[2]) Auch dies Oktaeder ist bei Rose als das zweite spitzere bezeichnet.

der zwei- und zweigliedrigen Richtungen sind die „zwei- und eingliedrigen Systeme."

Die Dissertation ist als Teil I bezeichnet; in der Tat fehlt die Betrachtung der ein- und eingliedrigen (triklinischen), sowie der sechsgliedrigen (drei- und einachsigen nach Weiss, modern hexagonalen) Systeme. Vielleicht war auch noch die Absicht vorhanden, die hemiedrischen Gestalten der regulären, viergliedrigen, hexagonalen und rhombischen Systeme zu behandeln.

Vieles von dem Inhalt der Dissertation berührt sich eng mit der Kristallonomie, z. B. die Entwicklung der Glieder des regulären Systems (Kristallonomie, S. 104—109), aber während dort das Hauptgewicht auf die Darstellung, auf die Projektion gelegt ist, wird in der Dissertation von graphischen Darstellungen ganz abgesehen, und es stützt sich die ganze Entwicklung auf die Formel. — Ähnlich beim zwei- und eingliedrigen System, das hier ebenfalls ohne die Projektion behandelt wird, über das ferner lediglich allgemeine Betrachtungen beigebracht werden, während die sehr ausführlichen Erörterungen der Kristallonomie, wie schon erwähnt, direkt an das System des Feldspats und des Pistazits anknüpfen.

3. Wegen Haidingers Aufsatz über axotomen Bleibaryt. [Zeitschrift Isis von Oken **17**, 424—428, 1825.]

In diesem Aufsatz polemisiert Neumann gegen Haidingers Auffassung, der in einer in der Isis, Bd. 15, 1824, Heft 11, S. 1156, veröffentlichten Arbeit die Kristalle von schwefelkohlensaurem Blei als Drillinge beschrieben hat, entstanden durch gesetzmäßige Verwachsungen dreier Individuen, von denen jedes einzelne eine geschobene vierseitige Säule mit schiefer Endfläche zur Grundform hat. Demgegenüber verficht Neumann die Ansicht, daß es sich um einfache, dem rhomboedrischen System angehörige Kristalle handelt, nur diese Auffassung vertrage sich mit dem in den Beiträgen zur Kristallonomie entwickelten kristallonomischen Gesetz. Neumann weist eingehend auf die Unklarheiten und Widersprüche hin, die sich in Haidingers Darstellung finden, so daß man oft nicht wisse, was er eigentlich habe sagen wollen. Die Genauigkeit der Messungen Haidingers solle nicht angezweifelt werden. Wenn diese für den Winkel der geschobenen vierseitigen Säule $120^0\,20'$ statt 120^0 ergäben,

so sei diese Differenz störenden Einwirkungen bei der Gestaltung des gemessenen Exemplars zuzuschreiben.

4. Über das Krystallsystem des Axinits. [Pogg. Ann. 4, 63—78, 1825.]

Einleitend wird bemerkt, daß die Darstellung des Axinitsystems, die Hauy in seinem großen Werke gegeben hat, zu den wenigen gehört, wo die Grundbestimmungen, wie er sie in der „forme primitive" gibt, gänzlich aufgegeben werden müssen, da die Unterschiede zwischen den Winkeln, die aus der angegebenen Primitivform folgen, und den in der Natur stattfindenden zu erheblich seien, um bloß als Folge einer nicht ganz scharfen Messung betrachtet werden zu können.

Es werden dann die bisher, insbesondere von Hauy und Mohs (letzterer hat, wie nebenbei bemerkt wird, bei der Übertragung der Hauyschen Bezeichnung in seine eigene einen Rechenfehler gemacht) am Axinit beobachteten Flächen zusammengestellt und ihr Zonenzusammenhang angegeben. Um die Neigungen derselben zu bestimmen, ist die Kenntnis von fünf gemessenen Winkeln nötig; und zwar müssen diese Winkel an demselben Kristall gemessen werden, da sich zwischen den gleichen, an verschiedenen Kristallen gemessenen Winkeln Differenzen bis zu 16 Minuten finden. Neumann hat nun an ein und demselben Kristall der Berliner Sammlung sieben Winkel gemessen und leitet aus den fünf ersten derselben die hauptsächlichsten übrigen Winkel ab. Er bedient sich dabei zur Darstellung der Projektion auf eine Kugel, d. h. der Durchschnitte der vom Mittelpunkt des Kristalls auf die verschiedenen Flächen gefällten Lote mit einer um denselben Mittelpunkt beschriebenen Kugel.

Schließlich zeigt Neumann, wie man alle Flächen auch dieses zu den ein- und eingliedrigen Systemen gehörenden Kristalls mit Weiss auf drei rechtwinklige Richtungen beziehen kann, indem man jede Fläche durch das Zeichen

$$\frac{1}{m} a : \frac{1}{n} b : \frac{1}{p} c$$

darstellt, wo die m, n, p einfache ganze Zahlen sind. Für die Grundverhältnisse $a : b : c$ der drei senkrechten Richtungen findet er

$$a : b \cdot c = \sqrt{51} : \sqrt{49} : \sqrt{1}.$$

Die auf Grund dieser Darstellung berechneten Winkel unterscheiden sich von den direkt gemessenen um höchstens neun Minuten. — Bemerkt wird hierbei, daß durch die Unsymmetrie aller Bildungen dieser Art Systeme die rechtwinkligen Richtungen aus der äußeren Erscheinung verschwinden, und daß es für ihre Realität keine andere Bürgschaft gebe, als die Einfachheit jener rationalen Verhältnisse aller Flächen.

Der messenden Kristallographie gehört auch die große in den Abhandlungen der Berliner Akademie 1830, S. 189—230, veröffentlichte Arbeit an:

5. Das Krystallsystem des Albites und der ihm verwandten Gattungen. Erste Abteilung. Methode und Fehler der Messungen, Kombination der Messungen, Tiroler Albite.

Das Hauptinteresse einer genaueren Untersuchung des Albites besteht darin, daß Feldspat und Albit chemisch einander sehr nahe stehen, während sie verschiedenen kristallographischen Abteilungen angehören; Feldspat ist zwei- und eingliedrig, Albit ein- und eingliedrig. Diese von Rose entdeckte mineralogische Differenz läßt eine nahe und innige Verwandtschaft unter zwei großen Kristallsystemen vermuten, und es ist zu erwarten, daß ein eingehendes Studium des Albites und seine Vergleichung mit dem Feldspat einen Aufschluß über den Zusammenhang kristallinischer Bildungen überhaupt gibt. Von diesem Aufschluß aber ist, so sagt Neumann, der Begriff einer höheren mineralogischen Einheit abhängig, wodurch solche mineralogisch getrennte Gattungen, wie Feldspat, Albit usw., erst auf eine exakte Weise miteinander vereinigt werden können. Und noch ein zweites Ziel haben die Neumannschen Messungen, nämlich die Veränderlichkeit der Kristallwinkel, bedingt durch Störungen bei der Kristallbildung verschiedener Kristallindividuen, exakt nachzuweisen. Zur Erreichung dieses Zieles waren neue Messungen von größerem Umfange anzustellen, da die Arbeit von Rose nur fünf gemessene Winkel enthält, so viel, als gerade hinreichen, um ein ein- und eingliedriges System zu bestimmen, während in sonstigen Arbeiten sich lediglich Notizen über einige Winkel vorfinden. Doch die Anstellung einer größeren Zahl von Beobachtungen allein genügt noch nicht, es kommt auch vor allem darauf an, durch richtige Verwertung der einzelnen Beobachtungen zu möglichst sicheren Resultaten zu gelangen. Zu dem Zwecke diskutiert

Neumann zunächst ausführlich die einzelnen Fehlerquellen der mit dem Wollastonschen Reflexionsgoniometer angestellten Messungen, gibt dann an, wie man verfahren muß, um die Bedingungen einer möglichst richtigen Messung zu erfüllen, und berechnet schließlich den Fehler, der bei diesem Verfahren noch zurückbleiben kann. Er beträgt, wenn man das Mittel von zehn Beobachtungen nimmt, 2′ und kann infolge von ganz besonderen Unvollkommenheiten, bzw. Krümmungen der Fläche höchstens auf 4′ steigen. Das Verfahren, das Neumann hier für das Reflexionsgoniometer auseinandersetzt, ist typisch für die Art; wie er überhaupt Meßinstrumente irgend welcher Art benutzt, indem er stets durch eine Kombination von Messungen, die unter verschiedenen Umständen auszuführen waren, den Grad der Zuverlässigkeit feststellte.

Weiter wird gezeigt, wie die einzelnen Messungen zur Ermittelung der Elemente des Kristallsystems zu kombinieren sind. Dabei hat man zunächst zu beachten, daß, wenn vier Flächen des Kristalls (von denen keine drei derselben Zone angehören) ihrer relativen Lage nach gegeben sind, aus ihnen alle übrigen Flächen durch den Zonenzusammenhang abzuleiten sind. Bei zweckmäßiger Wahl jener vier Flächen hängen ihre kristallographischen Zeichen von fünf Größen ab, den Elementen des Systems. Mittels dieser Elemente lassen sich alle übrigen Flächen des Systems und daher auch die Winkel zwischen den Flächen auf bekannte Weise berechnen. Wie ermittelt man nun umgekehrt aus den gemessenen Winkeln möglichst genaue Werte der Elemente? Dazu berechnet Neumann zunächst angenäherte Werte der Elemente, diese seien α, α', β, β', β'', und mit diesen angenäherten Werten die einzelnen Winkel V. Ist der Unterschied zwischen dem so erhaltenen angenäherten Werte V eines Winkels und dem gemessenen Werte desselben Winkels $= \varDelta V$, sind ferner $\varDelta\alpha$, $\varDelta\alpha'$, ... die Abweichungen der angenäherten Werte der Elemente von den wahren Werten, so existieren zwischen diesen Größen Gleichungen der Form

$$\varDelta V = A\varDelta\alpha + B\varDelta\alpha' + C\varDelta\beta + D\varDelta\beta' + E\varDelta\beta'',$$

wo A, B, ... durch die angenäherten Werte von V, α, α', ... gegeben sind. Solcher Gleichungen existieren so viele, als gemessene Winkel vorhanden sind; und aus ihnen sind nach der Methode

der kleinsten Quadrate die Unbekannten $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha'$, ... zu bestimmen. Zu der obigen Formel, die nur für Winkel an demselben Individuum gilt, kommt noch eine weitere für Zwillingswinkel, d. h. solche Neigungen, die von Flächen gebildet werden, welche beiden Individuen angehören.

Es folgt nun eine umfassende Reihe von Messungen, angestellt an vier aus Tirol stammenden Albitkristallen, ferner die Mitteilung von einzelnen Messungen an fünf weiteren Kristallen. Die Diskussion der Messungen ergab neben der Tatsache, daß bei einem der Kristalle Störungen im Wachstum Abnormitäten der Winkel von $^1/_2$ Grad hervorgebracht haben, die folgenden wichtigen Resultate:

1. Das Feldspatsystem und das Albitsystem stimmen überein in der Rechtwinkligkeit der Neigungen der Diagonalflächen.

2. Beide Systeme haben ferner auch gleiche Neigungen der Rhomboidflächen.

3. Das Albitsystem besitzt eine Symmetrie in der horizontalen Zone.

Aus diesen Resultaten folgt weiter, daß zwischen den fünf Elementen α, α', ... drei Relationen stattfinden, so daß schließlich alle Winkel nur von zwei Grundelementen abhängen.

Wie die genannten drei Bedingungsgleichungen mit den aus den Beobachtungen hergeleiteten Gleichungen zu verbinden sind, um die übrig bleibenden zwei Elemente auf die vorteilhafteste Weise zu bestimmen, das zu erörtern, hat Neumann einem zweiten Teile seiner Abhandlung vorbehalten, in dem auch Messungen an Albitkristallen vom St. Gotthard und aus Sibirien mitgeteilt werden sollten. — Doch ist dieser zweite Teil der Abhandlung nicht veröffentlicht.

6. In gewissem Zusammenhange mit der eben besprochenen Abhandlung steht eine kürzere Notiz, die in einem Schreiben Neumanns an Weiss enthalten ist. [Veröffentlicht Pogg. Ann. 24, 390—392, 1832.]

Hier wird ohne Beweis der Satz aufgestellt:

„Wenn irgend zwei Kristallsysteme gegeben sind, die untereinander in dem Verhältnis wie z. B. Feldspat- und Albitsystem stehen, d. h. in welchen Identität der Zonen, aber Verschiedenheit der Winkel stattfindet, so gibt es immer drei aufeinander rechtwinklige Dimensionen, auf welche die Flächen des einen Systems

dieselbe Beziehung haben, als die Flächen des anderen Systems, d. h. in Beziehung auf welches die Flächenausdrücke identisch sind; nur das Verhältnis der Dimensionen untereinander ist in den beiden Systemen verschieden."

Neumann fügt hinzu: „Dieser Satz ist ganz allgemein und beruht auf keinerlei Voraussetzung irgend einer Art. Es gibt ferner nur ein solches rechtwinkliges Achsensystem."

Eine unmittelbare Anwendung findet dieser Satz auf die Winkeländerungen, welche die Kristalle durch die Temperatur erfahren. Denn diese Änderungen sind nur dadurch hervorgebracht, daß die Ausdehnung des Kristalls in drei zueinander senkrechten Richtungen, den thermischen Achsen, eine verschiedene ist.

Am Schluß des Briefes erwähnt Neumann, daß er die Poissonschen Gleichungen der Elastizität, die dieser nur für isotrope Körper entwickelt hatte, auf Kristalle ausgedehnt habe (vgl. die weiterhin zu besprechende Arbeit über doppelte Strahlenbrechung, S. 69 ff.), und spricht kurz davon, daß man mittels jener Gleichungen aus den Winkeländerungen, welche ein Kristall durch einseitigen oder allseitig gleichen Druck erleidet, die Größe der Elastizität der Kristalle in verschiedener Richtung ableiten kann, ein Thema, das er in einer späteren Arbeit (s. S. 95) weiter verfolgt hat.

7. Das Gesetz der relativen Stellung der Individuen in den Krystallzwillingen, besonders in Beziehung auf eine Abhandlung des Professors Breithaupt über die Felsite, im Jahrbuch für 1830, Heft 11. [Schweiger-Seidel, Neues Jahrbuch der Chemie und Physik 3, 444—456, 1831.]

Gegenüber der der Natur widersprechenden Beschreibung, welche Professor Breithaupt von den Feldspat- und Albitzwillingen gibt, hebt Neumann hervor, daß das allgemeine und einzige Gesetz über die Stellung der beiden in einem Zwilling verwachsenen Individuen ist: „Die Individuen stehen symmetrisch in Beziehung auf eine Kristallfläche." „Alle Flächen, die senkrecht auf der Zwillingsfläche stehen, sind beiden Individuen gemeinschaftlich — alle Flächen des einen Individuums sind immer kristallonomisch mögliche Flächen des anderen." — Von der Zwillingsfläche ist die Verwachsungsfläche zu unterscheiden; diese gemeinschaftliche Grenze ist im allgemeinen keine Kristallfläche,

auch keine kristallonomisch mögliche, sondern von der Zufälligkeit der Fortwachsung abhängig.

Weiter zeigt Neumann, daß die Beschreibung der Feldspatzwillinge seitens des Herrn Breithaupt den Erfahrungen widerspricht, und fügt die Bemerkung hinzu, daß die Zwillinge des Albits, die den Karlsbader Feldspatzwillingen analog sind, meistenteils, vielleicht immer aus vier Individuen bestehen, von denen zwei und zwei nach dem gewöhnlichen Albitgesetze miteinander verwachsen sind, während erst diese Albitzwillinge miteinander nach dem Karlsbader Gesetz verwachsen sind.

Der Arbeit ist noch eine Nachschrift von Weiss hinzugefügt, die ebenfalls gegen Breithaupt polemisiert und den Scharfsinn in Neumanns Bemerkung über die den Karlsbader Zwillingen ähnlichen Doppelzwillinge hervorhebt.

Über eine weitere Arbeit, die teilweise kristallographischen Inhalts ist (sie betrifft das Kristallsystem des Gipses), wird weiterhin im Zusammenhang mit anderen Arbeiten über Kristallphysik berichtet werden. (Siehe S. 93 ff.)

II. Arbeiten zur Wärmelehre.

Neumanns Arbeiten über Wärme sind, soweit sie von ihm veröffentlicht sind, wesentlich experimenteller Natur und betreffen die Bestimmung der spezifischen Wärme, sowie der äußeren und inneren Leitungsfähigkeit. Steht in ihnen aber auch das Experiment im Vordergrunde, so wird doch zur Beurteilung und zweckmäßigen Einrichtung desselben die Theorie herangezogen. Über die Rolle, welche die Theorie in seinen Beobachtungen spielt, spricht sich Neumann in einem hinterlassenen Manuskript[1]) folgendermaßen aus:

„Zwei große Vorteile kann man bei experimentellen Untersuchungen über die Wärme aus der Theorie ziehen. Einerseits nämlich kann man, auf Grund der Theorie, die zweckmäßigste Einrichtung der Versuche im voraus bestimmen, und andererseits kann man von gewissen Fehlern (die von Einflüssen herrühren, welche sich im Versuch der direkten Beobachtung entziehen)

[1]) Siehe F. Neumann, Gesammelte Werke 2, 114 (1906). — Das Manuskript bildet eine Erläuterung zu der weiterhin zu besprechenden Abhandlung Nr. 3.

mittels der Theorie die möglichen Grenzen angeben. Selbstverständlich wird dabei vorausgesetzt, daß man über die Werte der in der Theorie enthaltenen Konstanten bereits irgend welche approximative Kenntnisse besitzt.

„In den Phänomenen der Wärme sind, neben anderen Elementen, wesentlich tätig und von wesentlichem Einfluß: die innere und äußere Wärmeleitungsfähigkeit und die spezifische Wärme. Die passende Einrichtung des Experimentes besteht darin, daß man demjenigen Elemente, welches näher studiert werden soll, den vorherrschenden Effekt zuteil werden läßt. — Eine völlige Unabhängigkeit von den übrigen Elementen ist nicht zu erreichen; man wird aber bestrebt sein, diese störenden Einflüsse möglichst gering zu machen, und dazu wird es nötig sein, den in Rede stehenden Effekt auf theoretischem Wege durch einen bestimmten Ausdruck darzustellen, der nähere Auskunft gibt über die Abhängigkeit des Effektes von allen überhaupt in Betracht kommenden Elementen."

Diese Worte sind charakteristisch für die ganze Art und Weise von Neumanns Beobachtungen überhaupt. Einmal sind die Beobachtungen nicht auf das Aufsuchen neuer Erscheinungen gerichtet, sondern es handelt sich bei ihnen lediglich um exakte Messungen. Sodann aber wird dadurch, daß die Theorie dem Experimente dienstbar gemacht wird, die Beobachtungsmethode selbst ein Gegenstand der Theorie. „Mit diesen Prinzipien", sagt Voigt[1]), „trat er einigermaßen in Gegensatz zu den virtuosen Experimentatoren, insbesondere Frankreichs, die sich genügen ließen, die Bedingungen des Experimentes so zu gestalten, daß der Einfluß der Fehlerquellen möglichst klein war, allenfalls durch Wiederholung der Beobachtungen unter wechselnden Umständen einen Schluß über die Größenordnung desselben zogen und durch Bildung von Mittelwerten aus zahlreichen Messungen die Genauigkeit steigerten."

Und noch eins tritt uns in diesen wie in allen Experimenten Neumanns entgegen: die Einfachheit der Vorrichtungen und Instrumente, mit denen er seine Beobachtungen anstellte. So zweckmäßig die von ihm konstruierten Apparate sind, eine kostbare oder elegante Ausstattung hat keiner derselben.

---

[1]) Voigt, S. 12.

a) Arbeiten über spezifische Wärme.

Die Bestimmung der spezifischen Wärme betreffen folgende Abhandlungen:

1. Untersuchung über die spezifische Wärme der Mineralien. Ein Sendschreiben an Herrn Prof. Weiss in Berlin [1]). Pogg. Ann. 23, 1—39, 1831.

2. Bestimmung der spezifischen Wärme des Wassers in der Nähe des Siedepunktes gegen Wasser von niedriger Temperatur. Aus einem Schreiben an Weiss in Berlin. Pogg. Ann. 23, 40—53, 1831.

3. Commentatio de emendanda formula per quam calores corporum specifici ex experimentis methodo mixtionis institutis computantur. Universitätsschrift, veröffentlicht beim feierlichen Antritt der ordentlichen Professur, Königsberg 1834.

4. Beobachtungen über die spezifische Wärme verschiedener, namentlich zusammengesetzter Körper. Pogg. Ann. 126, 123—142, 1865.

Dazu kommt eine aus den hinterlassenen Manuskripten kürzlich veröffentlichte Arbeit:

5. Theoretische Untersuchung über die zur Bestimmung der spezifischen Wärme dienende Methode. Gesammelte Werke 2, 53—64, 1906.

Die Arbeiten sind in doppelter Weise bedeutungsvoll, einmal in methodischer Hinsicht durch die Art und Weise, wie Neumann die Schwierigkeiten überwindet, die sich bei Ausführung der Bestimmungen der spezifischen Wärme darbieten; sodann durch die Aufstellung eines einfachen allgemeinen Gesetzes über den Zusammenhang zwischen spezifischer Wärme und chemischer Zusammensetzung. Daneben sind auch die zahlreichen numerischen Resultate wertvoll.

Zur Bestimmung der spezifischen Wärme hat sich Neu-

---

[1]) Ein großer Teil der von Neumann bei seinen Untersuchungen benutzten Mineralien war ihm von Weiss aus dem Berliner mineralogischen Museum zur Disposition gestellt, deshalb sind die Resultate zuerst Weiss mitgeteilt.

mann sowohl der Methode der Mischung, als der der Abkühlung bedient; die erstere von diesen wird als direkte Methode vorangestellt.

Die Methode der Mischung, angewendet auf einen festen Körper, besteht bekanntlich darin, daß man diesen Körper, nachdem er bis auf eine gewisse Temperatur V erhitzt ist, in eine Flüssigkeit von bekannter Temperatur W eintaucht und das hierdurch in der Flüssigkeit hervorgebrachte Temperaturmaximum w_m beobachtet. Mittels des Grundsatzes, daß die vom Körper abgegebene Wärmemenge genau ebenso groß sein muß, wie die von der Flüssigkeit aufgenommene Wärmemenge, ergibt sich dann die Gleichung[1]):

$$MC\,(V - w_m) = (FS + fs)\,(w_m - W), \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

in der M, F und f die Gewichte des festen Körpers, der Flüssigkeit und des diese enthaltenden Gefäßes, C, S und s ihre spezifischen Wärmen bezeichnen.

Bei der Anwendung dieser Formel wird 1. vorausgesetzt, daß in dem Moment, in welchem die Flüssigkeit F die Temperatur w_m erreicht hat, auch der feste Körper M diese Temperatur besitzt; 2. daß während der Mischung kein Wärmeverlust stattgefunden hat. Keine dieser Voraussetzungen ist in dem Experiment genau erfüllt. Es sind daher vor Anwendung von (I) an den beobachteten Zahlen Korrektionen anzubringen. Zur Ermittelung derselben ist die Änderung der Temperatur v des Körpers, dessen Anfangstemperatur V war, sowie die Änderung der Temperatur w der Flüssigkeit genauer zu untersuchen. Bei dieser Untersuchung geht Neumann in den Abhandlungen 1 und 5 (die nachgelassene Arbeit 5 ist der Ableitung verschiedener in 1 benutzter und dort größtenteils ohne Beweis mitgeteilter Formeln gewidmet) von dem Newtonschen Gesetze aus, daß die Wärmemenge, welche ein Körper seiner Umgebung während der Zeit dt durch Berührung mitteilt, proportional ist mit dt, ferner proportional mit seinem Temperaturüberschuß über die Umgebung und endlich proportional mit der Oberfläche des Körpers. Daraus folgen für v und w zwei Gleichungen der Form:

---

[1]) Die hier benutzte Bezeichnung ist die der Abhandlung 3; in 1 ist die Bezeichnung eine etwas abweichende.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -a(v-w), \\ \frac{dw}{dt} &= +a_1(v-w) - bw, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

die unter der Bedingung zu integrieren sind, daß zu der Zeit $t = 0$ $v = V$, $w = W$ sei. Für das Maximum w_m ergibt sich dann ein Wert, der sich von dem aus 1 folgenden durch Hinzufügung eines gewissen Faktors zu w_m unterscheidet. Die in diesem Faktor auftretenden Größen lassen sich teils durch Beobachtung, teils durch Rechnung bestimmen.

Das beschriebene Verfahren ist, da es auf dem Newtonschen Gesetze beruht und daher eine sehr große Leitungsfähigkeit voraussetzt, bei nicht metallischen Substanzen nicht ohne weiteres anwendbar. Bei diesen hat Neumann folgenden Weg eingeschlagen. Er brachte die zu untersuchende Substanz in ein geschlossenes Kästchen, derart, daß die leeren Zwischenräume im Kästchen mit Wasser gefüllt waren, und bestimmte die spezifischen Wärmemengen des Kästchens mit seinen verschiedenen Füllungen. Dabei war noch eine weitere Korrektion anzubringen, da wegen der geringen Leitungsfähigkeit im Moment des Eintritts des Maximums w_m von w die Temperatur im Innern des Kästchens von w_m verschieden war. Die innere Temperatur des Kästchens wurde an einem Thermometer beobachtet, das mittels eines Rohres in das Kästchen gebracht war. Die so beobachteten Temperaturen bedurften ihrerseits noch einer weiteren Korrektion, 1. wegen der Abkühlungsgeschwindigkeit des angewandten Thermometers im Kästchen, 2. wegen des Unterschiedes der Temperatur des Kästchens im Zentrum von seiner mittleren Temperatur. Zur Ermittelung des letztgenannten Unterschiedes war die Kenntnis der inneren Leitungsfähigkeit des Kästchens nötig. Endlich machte auch die Bestimmung der Temperatur V der Substanz im Moment des Eintauchens eine gewisse Schwierigkeit. Die Substanz wurde in einem Blechkasten erwärmt, der von Dämpfen siedenden Wassers durchströmt wurde, und damit war ihre Temperatur in dem Kasten bekannt; aber der Wärmeverlust, den die Substanz erlitt, bis sie in das Wasser tauchte, war schwer direkt zu bestimmen. Neumann verfuhr daher so, daß er für jede Füllung des Kästchens zwölf Versuche anstellte, aus welchen

der eben erwähnte Wärmeverlust eliminiert und dann erst die spezifische Wärmemenge der Füllung bestimmt wurde.

Neben der Methode der Mischung hat sich Neumann auch der Methode der Abkühlung bedient, mit derjenigen Verbesserung, die von Dulong herrührt, wonach die Abkühlung im luftverdünnten Raume geschieht. Die Zulässigkeit dieser Methode wurde durch Vergleich mit der Mischungsmethode geprüft. Die etwaigen störenden Einflüsse wurden durch geschickte Kombination der Beobachtungen möglichst eliminiert.

Nach den beiden Methoden wurde zunächst die spezifische Wärme von 36 Mineralien bestimmt. Aus den so gefundenen Zahlen leitet Neumann ein einfaches allgemeines Gesetz über den Zusammenhang zwischen spezifischer Wärme und chemischer Zusammensetzung ab. Er findet, daß das wichtige Dulongsche Gesetz, wonach die spezifischen Wärmen der chemisch einfachen Körper sich umgekehrt wie ihre stöchiometrischen Werte verhalten, sich auf chemisch zusammengesetzte Substanzen ausdehnen läßt. Das neue Gesetz lautet:

„Es verhalten sich bei chemisch ähnlich zusammengesetzten Stoffen die spezifischen Wärmen umgekehrt wie die stöchiometrischen Quantitäten.

„Oder was dasselbe ist, die stöchiometrischen Quantitäten bei chemisch ähnlich zusammengesetzten Stoffen besitzen gleiche spezifische Wärmequantität."

Unter stöchiometrischen Quantitäten sind bei chemisch ähnlichen oxydierten Stoffen solche Quantitäten zu verstehen, in welchen eine gleiche Quantität Sauerstoff vorhanden ist; bei den geschwefelten Stoffen ist der Schwefel das Maß der stöchiometrischen Quantität usw. Neumann hat das Gesetz zuerst bei den kohlensauren Salzen entdeckt, dann dasselbe bei den wasserfreien schwefelsauren Salzen und anderen zusammengesetzten Körpern bestätigt gefunden.

In einer Nachschrift zu Abhandlung 1 wird noch eine weitere Tabelle mitgeteilt, die die spezifischen Wärmen von 49 Mineralien enthält. Die Zahlen der Tabelle sind mit einem Apparate, ähnlich dem in Abhandlung 2 beschriebenen, ermittelt. (Näheres gibt Neumann nicht an.) Auch diese Zahlen bestätigen das Neumannsche Gesetz, ebenso die in Abhandlung 4 veröffentlichten Beobachtungen, die 22 chemisch reine Präparate, sowie

absoluten Alkohol und Terpentinöl betreffen. Diese Beobachtungen sind bereits im Jahre 1834 angestellt, aber erst 1865 auf Neumanns Veranlassung durch Pape veröffentlicht. Die zu ihrer Berechnung benutzte Formel ist in der hinterlassenen Abhandlung 5 abgeleitet. Bei dieser Gelegenheit hat übrigens Neumann die Eigenschaft des Selens entdeckt, sich noch unter der Siedehitze des Wassers in eine isomere Modifikation zu verwandeln.

Es mag hier noch bemerkt werden, daß Regnault durch seine Beobachtungen (Annales de Chimie et de Phys. [3] 1) das Neumannsche Gesetz bestätigt hat. Das Gesetz gilt natürlich, ebenso wie das Dulongsche, nur angenähert, was sich schon daraus ergibt, daß die spezifische Wärme sich mit der Temperatur ändert.

Auf die Untersuchung der spezifischen Wärme des Wassers (Abhandlung 2) ist Neumann durch seine Methode der Bestimmung der spezifischen Wärme der Mineralien (Abhandlung 1) geführt. Um die Korrektionen zu prüfen, die bei der Ermittelung der spezifischen Wärmemengen des dort benutzten Kästchens anzubringen waren, wurde das Kästchen mit reinem Wasser gefüllt, wodurch sich die spezifische Wärme des erwärmten Wassers gegen kaltes Wasser ergeben mußte. Die Prüfung jener Korrektionen erforderte somit eine andere direkte Bestimmung der in Rede stehenden spezifischen Wärme. Dies geschah ebenfalls nach der Mischungsmethode mittels eines besonderen Apparates, dessen Hauptstück in einer Vorrichtung bestand, um das heiße Wasser mit einer hinlänglich sicher bekannten Temperatur in das kalte Wasser zu bringen, es ist das der sogenannte Neumannsche Hahn. Mittels dieses Apparates, dessen Beschreibung hier zu weit führen würde, wies Neumann als erster mit Sicherheit nach, daß entgegen den Ergebnissen, zu denen De Luc und später Flaugergues gelangt waren, die spezifische Wärme des Wassers mit wachsender Temperatur zunimmt. Als Endresultat ergab sich das Verhältnis der spezifischen Wärme des Wassers bei 80^0R zu der bei 22^0R = 1,0127. Auch dieses Neumannsche Resultat ist durch die eingehenden Versuche von Regnault bestätigt.

In der Arbeit 3 werden die in Formel (I) anzubringenden Korrektionen auf wesentlich strengere Art ermittelt als in der Abhandlung 1, indem die Temperatur des eingetauchten Körpers

nicht mittels des Newtonschen Gesetzes, sondern durch Anwendung der Fourierschen Gleichung für die Wärmeleitung bestimmt wird. Dabei wird angenommen, daß jener Körper in sehr kleine Stücke zerschlagen ist, die ihrerseits als Kugeln von gleichen Radien angesehen werden. An Stelle der ersten Gleichung (II) (S. 62) tritt demgemäß die Fouriersche Gleichung für die Wärmeleitung einer Kugel, deren Temperaturzustand nur eine Funktion des Radius ist, nebst der zugehörigen Grenzbedingung für die Kugeloberfläche. Zur Bestimmung der Temperatur w der Flüssigkeit wird auch hier das Newtonsche Gesetz herangezogen, d. h. w wird auch hier als eine bloße Funktion der Zeit angesehen, was dann zulässig ist, wenn während des Experimentes die Flüssigkeit fortwährend umgerührt wird. Die zweite Gleichung (II) (S. 62) behält also ihre Form, nur daß für das darin vorkommende v die Temperatur der Kugeloberfläche zu nehmen ist. Aus den erwähnten Gleichungen folgt zunächst die Form der an Gleichung (I) (S. 61) anzubringenden Korrektion. Dieselbe besteht in einem gewissen, auf der rechten Seite von 1 hinzuzufügenden Faktor. Zur Berechnung dieses Faktors ist die vollständige Integration der in Rede stehenden Gleichungen nötig. Sie ergibt für v und w Reihen, deren Glieder nach den Wurzeln einer transzendenten Gleichung fortschreiten. Mittels dieser Reihen, die eingehend diskutiert werden, wird das Maximum w_m von w bestimmt, sowie die Zeit $t = T$, in welcher dies Maximum eintritt, ebenso die mittlere Temperatur der einzelnen Kugeln zu dieser Zeit; und nunmehr lassen sich alle in dem obigen Korrektionsfaktor auftretenden Hilfsgrößen berechnen. — Schließlich ist noch eine weitere Korrektion nötig, weil die Temperatur w der Flüssigkeit nicht identisch mit der Temperatur u des in die Flüssigkeit eingetauchten Thermometers ist. Die Beziehung zwischen beiden Temperaturen wird auf Grund des Newtonschen Gesetzes entwickelt, und damit werden für die an den Thermometerangaben anzubringenden Verbesserungen bestimmte Formeln gewonnen.

b) Arbeiten über Wärmeleitung.

1. Gleichzeitig mit seinen Untersuchungen über spezifische Wärme hat Neumann solche über Wärmeleitungsfähigkeit

schon um das Jahr 1830 angestellt. Die Ermittelung gewisser bei der Mischungsmethode nötigen Korrektionen erforderte die Kenntnis der inneren Leitungsfähigkeit des in der oben besprochenen Arbeit 1 benutzten Kästchens (S. 62). So werden denn schon in jener Arbeit 1 drei verschiedene Verfahren zur Bestimmung der absoluten inneren Leitungsfähigkeit entwickelt. Alle drei beruhen auf der Beobachtung der Temperatur im Mittelpunkte einer Kugel, die von der Oberfläche her zuerst erwärmt, nachher wieder abgekühlt wird. Ist bei Beginn der Abkühlung die Temperatur der Oberfläche noch höher als die des Mittelpunktes, so wird auch nach Beginn der Abkühlung letztere zunächst noch steigen bis zu einer Maximaltemperatur, um erst später zu sinken. Beobachtet man nun beim Abkühlungsprozeß die Temperatur des im Mittelpunkt angebrachten Thermometers zu zwei verschiedenen Zeiten, beobachtet weiter die Maximaltemperatur des Thermometers und die Zeit ihres Eintritts, beobachtet endlich im späteren Verlaufe des Abkühlungsprozesses noch zwei andere Temperaturen und die zugehörigen Zeiten, so kann aus allen diesen Beobachtungen die innere Leitungsfähigkeit der Kugel bestimmt werden. Darin besteht das eine Verfahren. Bei den beiden anderen kommen andere Beobachtungen desselben Abkühlungsprozesses in Frage. Die Formeln zur Berechnung der Beobachtungen ergeben sich durch Integration der Fourierschen Gleichung für die konzentrische Temperaturverteilung in einer Kugel. In der Abhandlung 1 werden jene Formeln ohne Beweis mitgeteilt; die Ableitung der Formeln findet sich in einer nachgelassenen Arbeit, die in Bd. II der Gesammelten Werke, S. 65—78, 1906, veröffentlicht ist und den Titel führt: Wie man durch geeignete Beobachtungen den absoluten Wert der inneren Leitungsfähigkeit eines homogenen Körpers zu bestimmen vermag.

Es mag noch bemerkt werden, daß, wenn auch die angewandten Formeln der Fourierschen Theorie entlehnt sind, ihre Anwendung, bei der lediglich die Temperatur des Kugelmittelpunktes beobachtet wird, durchaus eigenartig ist.

2. Die vorstehenden, im Anfang der dreißiger Jahre angestellten Untersuchungen über Wärmeleitung sind nach längerer Unterbrechung von Neumann 1859 von neuem aufgenommen, aber nach ganz anderer Methode durchgeführt. Die Haupt-

resultate dieser späteren Beobachtungen sind unter dem Titel: Expériences sur la conductibilité calorifique des solides 1862 in den Annales de Chimie et de Physique (3) **66**, 183—187, veröffentlicht.

Inhaltlich stimmt dieser Aufsatz wesentlich überein mit einem in den Gesammelten Werken, Bd. II, S. 139—142, 1906, abgedruckten, vom 10. März 1862 datierten Briefe Neumanns an seinen Schüler Radau. Die neue Methode Neumanns besteht für gut leitende Körper in folgendem: Ein Metallstab von drei bis vier Linien Durchmesser wird an einem Ende durch eine Lampe so lange erwärmt, daß ungefähr eine stationäre Temperaturverteilung in ihm eingetreten ist. Dann wird die Lampe entfernt, und nun wird mittels passend angebrachter Thermoketten die Temperatur der Enden des Stabes von acht zu acht Sekunden gemessen. Die Messung selbst geschieht durch einen Spiegelapparat. Aus der Summe und der Differenz der jedesmal beobachteten Temperaturen lassen sich die äußere und innere Leitungsfähigkeit ableiten. Das Wesen der Methode besteht also darin, 1. daß nicht der stationäre Temperaturzustand des Stabes beobachtet wird, sondern der mit der Zeit variable Zustand (infolgedessen ist die Methode von der Kenntnis des schwer zu definierenden Anfangszustandes unabhängig), 2. daß mit dem Stabe keine Deformation vorgenommen wird, die sich nicht streng mit der Rechnung verfolgen ließe; 3. daß jedesmal gleichzeitig der absolute Wert der inneren und äußeren Leitungsfähigkeit bestimmt wird.

Statt der Stäbe hat Neumann auch Ringe angewandt.

Bei schlechten Leitern ist die Methode nicht verwendbar. Hier wird aus der Substanz eine Kugel (oder ein Würfel) gefertigt, diese gleichförmig erwärmt und dann in freier Luft abgekühlt. Nach einiger Zeit werden die Temperaturen im Zentrum und an den Oberflächen in regelmäßigen Intervallen beobachtet. Von den durch seine Methode erhaltenen Ergebnissen teilt Neumann die Werte der Leitungsfähigkeiten von fünf Metallen und sechs schlecht leitenden Substanzen mit.

Das einzige Hindernis, so fügt er hinzu, durch diese Methode zu ganz scharfen Resultaten zu gelangen, besteht darin, daß beide Leitungsfähigkeiten mit der Temperatur variieren und

das Gesetz für diese Variation nur sehr unvollkommen bekannt ist[1]).

Im Anschluß an den eben besprochenen Aufsatz Neumanns hat Radau in der Pariser Zeitschrift „Cosmos“ 1862 einen Überblick über das Wesen und die Tragweite der Neumannschen Untersuchungen gegeben [abgedruckt in den Gesammelten Werken, Bd. II, S. 146—158, 1906], insbesondere über ihr Verhältnis einerseits zu den früher benutzten Methoden, die nur die relative Wärmeleitungsfähigkeit zu ermitteln gestatteten, andererseits zu den gleichzeitigen Untersuchungen Ångströms. Hier werden auch die Gründzüge der analytischen Entwicklung, auf denen die Methode beruht, kurz angegeben, während sich darüber in der Neumannschen Mitteilung selbst nichts findet.

3. Ferner weist Radau bei Besprechung von Ångströms Beobachtung über die Temperaturänderung des Erdbodens darauf hin, daß ähnliche Untersuchungen von Neumann schon in den Jahren 1836—1839 zu Königsberg angestellt und später von Neumanns Schüler Schumann berechnet seien. Er bespricht endlich die Ergebnisse einer Arbeit von Saalschütz, die, von Neumann angeregt, untersucht, wie unregelmäßige, nicht periodische Änderungen der Temperatur der Erdoberfläche sich in tiefere Erdschichten fortpflanzen. [S. die Dissertation von Saalschütz: „De non periodica mutatione caloris terrae“, Königsberg 1861, sowie Astronomische Nachrichten **56**, 1862.]

Dem Probleme der Wärmeleitung im Erdboden hat Neumann auch weiterhin sein Interesse zugewandt. Auf seine Veranlassung wurde 1872 im Botanischen Garten zu Königsberg eine Station zur Messung von Erdtemperaturen gegründet, und zwar an derselben Stelle, an der Neumann Ende der dreißiger Jahre die vorher erwähnten Beobachtungen angestellt hatte. Die

---

[1]) Auf die Abhängigkeit der inneren und äußeren Wärmeleitungsfähigkeit von der Temperatur nimmt unter anderen eine neuere, von Volkmann, dem Nachfolger Neumanns, angeregte Arbeit von G. Glage über die Neumannsche Methode Rücksicht. [Dissertation, Königsberg 1905; vgl. Ann. d. Phys. (4) **18**, 904—940, 1905.]

Eine ebenso eingehende Untersuchung, wie Glage über die Neumannsche Methode für gut leitende Körper angestellt, ist, ebenfalls auf Anregung Volkmanns, hinsichtlich der Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender Körper von H. Hecht unternommen. [Dissertation, Königsberg 1903; Ann. d. Phys. (4) **14**, 1008—1030, 1904.]

Station war mit sieben Erdthermometern von 4 bis 28 Fuß Länge sowie mehreren Luftthermometern versehen. An allen Thermometern wurden täglich drei Ablesungen gemacht. Die Kosten für die Anschaffung dieser Instrumente hatten die Physikalisch-ökonomische Gesellschaft zu Königsberg, der Königsberger Verein für wissenschaftliche Heilkunde, sowie der Direktor des Botanischen Gartens, Prof. Caspary, getragen. Die Kalibrierung und Aufstellung der Thermometer hatte Neumanns Schüler E. Dorn (jetzt in Halle a. S.) besorgt. Er hat darüber in den Schriften der Physikalisch-ökonomischen Gesellschaft, Bd. 13, S. 37—88, 159—160, Königsberg 1872, berichtet. Dorn hat auch die sechs ersten Jahrgänge der an der Station angestellten Beobachtungen herausgegeben (Schriften der Physikalisch-ökonomischen Gesellschaft, Bd. 15, 16, 17, 18, 20, 23).

Die späteren Beobachtungen bis 1889 inkl. sind von Mischpeter, gleichfalls einem Schüler Neumanns, in den Schriften der Physikalisch-ökonomischen Gesellschaft veröffentlicht, die letzte der 18 jährigen Reihe in Bd. 34, 1893. Weitere Veröffentlichungen sind nicht erfolgt.

III. Arbeiten aus der Optik und der Elastizitätstheorie.

a) Rein optische Arbeiten.

1. Theorie der doppelten Strahlenbrechung, abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik. [Pogg. Ann. d. Phys. u. Chem. **25**, 418—454, 1832] [1]).

Diese Arbeit ist die erste [2]), welche Neumann auf dem Gebiete der theoretischen Physik veröffentlicht hat; sie war neben

[1]) Von neuem abgedruckt in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 76, herausgegeben von A. Wangerin, 1896. Den Anmerkungen zu dieser Ausgabe ist die folgende Darstellung teilweise entnommen.

[2]) Die im Jahre vorher, 1831, erschienene Abhandlung von Neumann über die spezifische Wärme der Mineralien nimmt zwar auf einige Formeln aus der Theorie der Wärmeleitung Bezug, ist aber wesentlich experimentell; auch ist die Begründung der angewandten Formeln von Neumann selbst nicht veröffentlicht. Mit Recht kann daher die Arbeit über die doppelte Strahlenbrechung als die erste theoretische Untersuchung bezeichnet werden.

den gleichzeitigen Arbeiten Cauchys von der größten Bedeutung für die Entwicklung der Optik. Die Lichttheorie war um das Jahr 1820 durch Fresnel (1788—1827) in ganz neue Bahnen gelenkt. Durch den Nachweis, daß das Wesen des Lichtes in der Ausbreitung transversal schwingender Wellen zu suchen sei, hatte er die Emissionstheorie definitiv beseitigt und die Undulationstheorie auf eine feste, unanfechtbare Basis gestellt. Weiter hatte Fresnel die Doppelbrechung in Kristallen studiert und hier durch Induktion gewisse Gesetze gefunden, für die er dann eine theoretische Ableitung zu geben suchte. Führte diese Theorie auch zu Resultaten, die völlig mit der Erfahrung in Übereinstimmung waren, so lagen derselben doch gewisse Hypothesen zugrunde, die einer strengeren Kritik gegenüber nicht als gerechtfertigt erscheinen konnten. Das gilt insbesondere von der Annahme, daß die Komponente der elastischen Kraft senkrecht zur Wellenebene unwirksam sei. Es blieb daher die Aufgabe zu lösen, die Gesetze der Doppelbrechung streng deduktiv aus mechanischen Prinzipien abzuleiten; und diese Aufgabe ist von Neumann in der vorliegenden Arbeit gelöst. Gleichzeitig mit Neumann hatte Cauchy dieselbe Aufgabe in Angriff genommen, und er hatte die Resultate, zu denen er gelangt war, ohne Ableitung in den Mémoires der Pariser Akademie, Bd. X (der Band ist 1831 erschienen), veröffentlicht. Diese Resultate decken sich zum Teil mit denen Neumanns. Das führt Neumann selbst in folgender, seiner Abhandlung vorausgeschickten Bemerkung an:

„Die in dieser Abhandlung enthaltenen theoretischen Resultate müssen auf Priorität resignieren, da ich im Tom. X der Mémoir. de l'Acad. aus einer Inhaltsangabe einer Abhandlung, welche Cauchy der Pariser Akademie vorgelegt hat, ersehen habe, daß in dieser Abhandlung, außer anderen, dieselben Resultate bereits enthalten sind. Ich würde meine Abhandlung ganz unterdrückt haben, wenn ich nicht glaubte, daß die in ihr angewandte einfache, ich möchte sagen elementare Behandlung eines sehr schwierigen Problems auch dann noch von Interesse sein wird, wenn die ohne Zweifel eine viel gelehrtere und allgemeinere Analyse desselben Problems enthaltende Abhandlung von Cauchy selbst im Druck erschienen sein wird.“

Muß man hiernach auch Cauchy hinsichtlich eines Teiles

der Resultate die Priorität zugestehen, so ist doch hervorzuheben, daß Neumanns Untersuchung einen durchaus selbständigen Charakter trägt und unabhängig von der Cauchys entstanden ist. Cauchy geht, wie sich aus dem Teil seiner Rechnungen ergibt, den er in Band V seiner Exercices veröffentlicht hat, von viel komplizierteren Grundgleichungen aus und hat zudem sein Hauptinteresse der mathematischen Seite der Frage zugewandt, während Neumann wesentlich die physikalische Seite des Problems ins Auge faßt und daher seine Rechnungen so elementar und einfach wie möglich zu gestalten sucht. Die große Eleganz und Klarheit der Darstellung verleiht Neumanns Arbeit, abgesehen von der Bedeutung, die sie für die Entwicklung der Optik gehabt hat, einen hohen Wert.

Gehen wir nun auf den Inhalt der Arbeit ein, so wird in § 1 im Anschluß und gestützt auf die Untersuchungen von Fresnel gezeigt, daß die allgemeinen Untersuchungen über die Wellenbewegung in einem elastischen Medium sich zurückführen lassen auf die Untersuchung der Wellenfläche von einem Erschütterungspunkte aus, und daß diese Wellenfläche die Enveloppe derjenigen Ebenen ist, die man erhält, wenn man für alle durch einen festen Punkt gelegten Wellenebenen die Lage nach Verlauf der Zeiteinheit fixiert. Es sind daher nur die Gesetze für die Fortpflanzung ebener Wellen zu ermitteln.

Die Gleichungen, aus denen die genannten Gesetze abzuleiten sind, sind (§ 2) die Differentialgleichungen der Bewegung für ein elastisches Medium von kristallinischer Beschaffenheit. Daß die Lichtschwingungen als den elastischen Schwingungen fester Körper analog angesehen werden, begründet Neumann damit, daß für Bewegungen, bei denen die Verschiebungen kleiner sind als die Sphäre des stabilen Gleichgewichtes (und um solche Bewegungen handelt es sich bei den Lichtschwingungen), der Unterschied zwischen festen, flüssigen und gasförmigen Körpern wegfällt. „Für die Lichtundulationen ist demnach ein Unterschied der Kohäsionszustände nicht vorhanden, wie das z. B. für die Schallschwingungen der Fall ist, sondern es gelten für jene Undulationen nur die Gleichungen, welche sich auf die innere vibrierende Bewegung eines festen Mediums beziehen, da diejenigen für vibrierende Bewegungen in flüssigen Medien, die hydrodynamischen Gleichungen, wesentlich die Verrückung der

vibrierenden Teilchen größer als die Sphäre des stabilen Gleichgewichtes voraussetzen."

Es mag bemerkt werden, daß Fresnel, der Begründer dieser Anschauung, auf dieselbe dadurch geführt wurde, daß er das Wesen des Lichtes als in transversalen Schwingungen bestehend erkannte, und daß man von analogen Bewegungen nur die fester elastischer Körper kannte. Fresnels optische Untersuchungen gaben dann den Anstoß zum Ausbau der Elastizitätstheorie als einer besonderen Disziplin; ihre Grundgleichungen wurden, soweit es sich um unkristallinische Medien handelt, zuerst im Jahre 1824 von Navier entwickelt. An Navier knüpft Neumann an und dehnt dessen Resultate auf solche kristallinische Medien aus, die in bezug auf drei rechtwinklige Ebenen symmetrisch sind, indem er zu der Navierschen Hypothese für die gegenseitige Wirkung zweier Teilchen aufeinander die weitere hinzufügt, daß diese Wirkung eine Funktion der Winkel ist, die die Richtung der Entfernung mit gewissen in der kristallinischen Struktur gegebenen Linien bildet. Die Gleichungen, zu denen er gelangt, sind die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
E\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2A_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + 2A\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z},\\
E\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= A_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_1\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2A_1\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z},\\
E\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2A\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} + 2A_1\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(I)}$$

Darin sind u, v, w die den Koordinatenachsen parallelen Verrückungen eines Teilchens, t die Zeit, E die Dichtigkeit, A, A_1, A_{11}, B, C, D Konstante, die von der Natur des Mediums abhängen. Die Achsen x, y, z sind parallel den Durchschnitten der drei rechtwinkligen Symmetrieebenen. Die Aufstellung dieser elastischen Gleichungen für Kristalle, deren Ableitung Neumann

übrigens nicht mitteilt [1]), ist eins der wesentlichsten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit.

Die Konstanten $A, \ldots, D$ stellt Neumann noch durch Integrale dar, die über eine Kugelfläche mit dem Radius 1 zu erstrecken sind, und zeigt, daß für nicht kristallinische Medien

$$A = A_1 = A_{11} = \tfrac{1}{3} B = \tfrac{1}{3} C = \tfrac{1}{3} D$$

sein muß, für kristallinische Substanzen des regulären Systems

$$A = A_1 = A_{11},\ B = C = D,$$

für die vier- und sechsgliedrigen Systeme endlich

$$A = A_1,\ C = D.$$

Die Behandlung der an sich ziemlich komplizierten Gleichungen (I) vereinfacht sich wesentlich für den Fall ebener Wellen, auf den nach § 1 ja die allgemeine Wellenbewegung zurückgeführt werden kann, da in diesem Falle die Differentialgleichungen nur von zwei statt von vier unabhängigen Veränderlichen abhängen. Die Durchführung der Rechnung (§ 3, 4) ergibt, daß, wenn die ursprünglichen Erschütterungen in ihrer Gesamtheit eine Ebene bilden, in dem Medium sechs Wellenebenen erregt werden, von denen drei sich vorwärts und drei sich rückwärts bewegen, und zwar schreiten je eine der ersteren und eine der letzeren mit derselben Geschwindigkeit gleichförmig fort, während für die drei nach vorwärts sich bewegenden Wellenebenen die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten verschieden sind. Ihre Quadrate sind die Wurzeln einer Gleichung dritten Grades. Die Bewegungen in den drei Wellen finden (§ 5) in drei aufeinander senkrechten Richtungen statt, nämlich parallel den Achsen eines gewissen Ellipsoids, des „Fortpflanzungsellipsoids". Die Achsen dieses Ellipsoids sind zugleich den reziproken Werten der drei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten proportional. Die Anwendung der Resultate auf den Fall eines unkristallinischen Mediums ergibt eine longitudinale, zur Wellenebene senkrechte, und zwei zueinander senkrecht liegende transversale, in der Wellenebene erfolgende Schwingungen. Die Richtung der beiden letzteren, die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben, bleibt unbestimmt,

[1]) Eine Ableitung findet man in den Anmerkungen zu meiner Ausgabe der doppelten Strahlenbrechung (Klassiker 76, 40—43; vgl. F. Neumann, Gesammelte Werke 2, 191—193).

und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Welle ist die $\sqrt{3}$-fache von der der transversalen, ein Resultat, das mit einem von Poisson in seinem „Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques" abgeleiteten übereinstimmt.

Betrachtet man ferner in einem kristallinischen Medium ebene Wellen, die den Symmetrieebenen parallel sind, so erhält man Resultate, die völlig den Beobachtungen entsprechen, sobald man unter Polarisationsebene die durch die Schwingungsrichtung und die Wellennormale bestimmte Ebene versteht. Für Wellenebenen, die einer der Koordinatenachsen parallel sind, zerfällt die Gleichung dritten Grades, der die Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten genügen, in einen linearen Faktor, der einer der transversalen Wellen, und einen quadratischen, der der anderen transversalen und der longitudinalen Welle entspricht. Soll die in dem zweiten Faktor enthaltene transversale Welle eine konstante Geschwindigkeit besitzen, wie es der Fall sein muß, wenn Übereinstimmung mit den empirischen Gesetzen stattfinden soll, so ist erforderlich, daß zwischen den sechs Konstanten der Grundgleichungen (I) drei Relationen bestehen, nämlich

$$(B - A_1)(C - A_1) = 4 A_1^2 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \text{(II)}$$

und zwei analoge.

Mit diesen Relationen verbindet Neumann (§ 6) die weitere Annahme [1], daß A, A_1, A_{11} nur wenig voneinander verschieden sind, ebenso B, C, D; er rechtfertigt dies damit, daß bei allen optisch untersuchten Kristallen die Exzentrizitäten der Ellipsen, deren Achsen zwei der Größen $\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{A_1}}, \frac{1}{\sqrt{A_{11}}}$ sind, nur kleine Größen sind. Aus dieser Annahme, verbunden mit der vorhergehenden Relation (II), folgt:

$$B + D = 6A, \quad B + C = 6A_1, \quad C + D = 6A_{11}. \quad \text{(III)}$$

Vermöge der Gleichungen (III) zerfällt (§ 7) die allgemeine Gleichung dritten Grades für die Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in zwei Gleichungen, eine lineare und eine

[1]) Daß die Relationen in (II) für sich allein nicht genügen, um bei beliebiger Lage der Wellenebene die Absonderung der longitudinalen Welle zu bewirken, hat Beltrami in dem Aufsatz: „Sulla teoria delle onde" (Reale Istituto Lombardo, Rendiconti 1886) gezeigt.

quadratische. Die letztere ist identisch mit derjenigen, durch welche der größte und kleinste Radius desjenigen Zentralschnittes der Fresnelschen Elastizitätsfläche bestimmt wird, der der Wellenebene parallel ist. Die Konstruktion der Wurzeln der in Rede stehenden quadratischen Gleichung ist somit identisch mit derjenigen, welche Fresnel gegeben hat, um die Geschwindigkeiten der Fortpflanzung der beiden ebenen Lichtwellen in einer beliebigen Lage in einem doppelbrechenden Medium zu finden. Weiter ergibt sich (§ 8), daß die Schwingungen der beiden in Rede stehenden Wellen sehr nahe parallel der Wellenebene sind, und zwar so, daß die Richtung jeder Schwingung nahezu senkrecht auf demjenigen Radiusvektor des Durchschnittes der Wellenebene und der Elastizitätsfläche steht, durch welchen ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit gegeben ist. Die dritte Welle, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch die lineare Gleichung bestimmt ist, ist nahezu longitudinal.

Somit sind (§ 9) die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung, insofern sie sich auf die Richtung der gebrochenen Strahlen[1]) beziehen, übereinstimmend mit denjenigen, die Fresnel aus seiner Theorie abgeleitet und der Erfahrung entsprechend gefunden hat, streng aus den Grundgleichungen der Elastizitätstheorie deduziert. Man braucht ja nur die Lichtwellen als diejenigen der drei Wellen, in welche sich die ursprüngliche Wellenebene im allgemeinsten Falle immer teilt, zu definieren, deren Schwingungen nahezu parallel der Wellenebene sind. Die entwickelte Theorie erklärt aber nicht allein die Richtung der doppelt gebrochenen Strahlen; sie zeigt auch ihr Verhalten in Hinsicht der Polarisation, falls man die Polarisationsebene definiert als die durch die Wellennormale und die Richtung der Schwingungen gelegte Ebene, im Gegensatz zu Fresnels Annahme, nach der die Polarisationsrichtung senkrecht auf der Richtung der Schwingungen steht. Dieser Gegensatz ist ein fundamentaler. Welche von beiden Annahmen den Vorzug verdient, ist jahrzehntelang zwischen den Physikern streitig gewesen; ein Teil derselben hat sich der Fresnelschen, ein anderer Teil der Neumannschen Auffassung angeschlossen. Ein stichhaltiger experimenteller Nachweis für die Richtigkeit der einen oder der anderen Annahme hat

[1]) N. B. d. h. eigentlich der Normalen der gebrochenen Wellen.

sich bis heute nicht erbringen lassen. Neumanns Schluß, daß die aus den Elastizitätsgleichungen folgenden Gesetze nur unter Zugrundelegung seiner Definition mit der Erfahrung übereinstimmen, daß man also entweder seine Definition annehmen, oder seine Grundlage der Theorie verwerfen müsse, ist jedenfalls unanfechtbar. Auch andere Autoren, die von der Elastizitätstheorie ausgegangen sind (Green, Mac Cullagh, Lamé, Kirchhoff usw.), sind zu demselben Resultat gelangt. Welcher Zusammenhang zwischen den beiden Vektoren besteht, die in der einen und der anderen Theorie die Lichtschwingungen darstellen, ist von Drude (Götting. Nachrichten 1892, S. 361—412) erörtert. Auch er gelangt zu dem Resultat, daß ein Grund, eine der Theorien vor der anderen zu bevorzugen, nicht vorhanden ist.

Daß die Theorie neben den beiden transversalen eine longitudinale Welle ergibt, von der die Beobachtungen nichts zeigen, hat zu Bedenken und mannigfachen späteren Modifikationen der Theorie Veranlassung gegeben. Frei von solchen Bedenken ist die elektromagnetische Lichttheorie, die allmählich die frühere elastische Theorie in den Hintergrund zu drängen scheint. Bei ihr fehlt nicht nur die longitudinale Welle ganz, sondern in ihr traten gleichzeitig zwei zueinander senkrechte transversale Schwingungen auf, die magnetische und die elektrische. Bei den ersteren entspricht die Schwingungsrichtung der Neumannschen, bei den letzteren der Fresnelschen Anschauung.

Wenn aber auch die elastische Theorie der Lichtschwingungen einst ganz verlassen werden sollte, die große Bedeutung dieser und der übrigen optischen Arbeiten Neumanns für die Entwicklung der theoretischen Optik wird stets anerkannt werden müssen.

Zusatz. In seinen Vorlesungen und Seminarübungen hat Neumann verschiedene andere Darstellungen der Theorie der Doppelbrechung gegeben. So enthalten die Vorlesungen über Elastizität eine Theorie der Lichtwellen im inkompressiblen Äther; die Annahme der Inkompressibilität, vermöge deren die longitudinale Welle von vornherein fortfällt, ist von C. Neumann in seiner Habilitationsschrift (Explicare tentatur, quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur, Halle 1858) in die Theorie eingeführt und später in

den beiden ersten Bänden der mathematischen Annalen (Über die Ätherbewegung in Kristallen) ausführlich entwickelt.

In derselben Vorlesung sind ferner die Lamé schen Differentialgleichungen der Lichtbewegung in Kristallen abgeleitet (siehe Lamé, leçons sur la théorie de l'élasticité des corps solides, 1852, Vorl. 17—24). Neumann geht dabei von der allgemeinsten Gleichung der Elastizität für Kristalle aus, die 36 Konstanten enthalten. Führt man die Bedingung der Existenz transversaler Wellen ein, so reduzieren sich diese auf zwölf. Abstrahiert man weiter von den longitudinalen Schwingungen, so fallen sechs weitere Konstanten fort; die übrig bleibenden sechs endlich reduzieren sich durch eine schickliche Wahl des Koordinatensystems auf drei. Auf die weiteren Resultate einzugehen, würde hier zu weit führen.

In den Seminarübungen finden sich noch folgende Erweiterungen der Theorie. Die Relationen (III) (S. 74) zwischen den sechs Konstanten reduzieren sich für Kristalle des regulären Systems, bei denen $A = A_1 = A_{11}$, $B = C = D$ ist, auf die eine

$$B = 3A \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IIIa)}$$

Neumann untersucht, wie sich die Resultate, die bei Stattfinden der Relation (III a) für reguläre Kristalle die gleichen sind wie für isotrope Medien, modifizieren, wenn man von der Relation (III a) absieht. Näheres über die Resultate dieser Untersuchung, wie auch über eine von Neumann entwickelte Theorie der zirkularen und elliptischen Polarisation wird weiterhin, gelegentlich der Besprechungen der Seminarübungen, mitgeteilt werden.

2. Eine weitere Abhandlung rein optischen Inhalts bildet die 1832 in Pogg. Ann. 26, 89—122, publizierte „Theorie der elliptischen Polarisation des Lichtes, welche durch Reflexion von Metallflächen erzeugt wird".

Es handelt sich hier nicht um eine eigentliche Theorie der Metallreflexion, etwa von der Art wie die Theorie der doppelten Strahlenbrechung, sondern um die Ableitung einfacher Gesetze aus den Beobachtungen.

Neumann geht, um alle von Brewster, dem wir die ersten umfassenden Untersuchungen über Metallreflexion verdanken,

beobachteten Erscheinungen des von Metallflächen reflektierten Lichtes zu erklären, von folgenden zwei Grundsätzen aus:

1) Die Intensität eines von der Metallfläche reflektierten polarisierten Lichtstrahles ist bei demselben Einfallswinkel verschieden, je nachdem seine Polarisationsebene in der Reflexionsebene lag oder senkrecht gegen diese stand. In dieser Hinsicht verhalten sich die Metallflächen, wie die Oberflächen durchsichtiger Körper bei der partiellen Reflexion — und nicht wie diejenigen Flächen, an welchen totale Reflexion stattfindet.

Das Verhältnis der reflektierten Lichtintensitäten eines senkrecht und eines parallel zur Reflexionsebene polarisierten Strahles ist, wie bei der partiellen Reflexion, eine Funktion der Inzidenz, und zwar wird diese Funktion ein Minimum für die Inzidenz unter dem Polarisationswinkel, ohne aber $= 0$ zu werden, und nimmt von dieser Inzidenz auf beiden Seiten zu, so daß sowohl für die Inzidenz 0^0, wie auch für die Inzidenz 90^0 das Verhältnis gleich Eins wird.

2) Zwei von einer Metallfläche reflektierte Strahlen, wovon der eine parallel, der andere senkrecht zur Reflexionsebene polarisiert ist, verhalten sich so, daß der eine, nämlich derjenige, welcher parallel der Reflexionsebene polarisiert ist, dem anderen um einen Bruchteil einer Undulationslänge voraus ist.

Das Gesetz, nach dem das unter 1. genannte Intensitätsverhältnis und die Phasenverzögerung der beiden Komponenten vom Einfallswinkel abhängt, leitet Neumann ab, indem er denselben Strahl wiederholt reflektieren läßt. Geradlinig polarisiertes Licht geht nach einer Reflexion in elliptisch polarisiertes über, d. h. in solches, bei dem die Ätherteilchen in elliptischen Bahnen sich bewegen (Brewster verband mit der Bezeichnung „elliptisch polarisiert“ einen ganz anderen Begriff). Durch mehrmalige Reflexion kann die elliptische Polarisation wiederum in eine geradlinige verwandelt werden. Indem Neumann auf dieses die Brewsterschen Beobachtungen anwandte, gelangte er zu folgenden zwei Gesetzen:

Es seien A, B die Amplituden des einfallenden Lichtes in der Einfallsebene und senkrecht darauf, die entsprechenden Komponenten des einmal reflektierten Lichtes seien sA und pB; die letztere Komponente habe zugleich die Phasenverzögerung δ gegen die erstere, so ist für den Einfallswinkel i:

$$tg\left(\frac{\delta}{\lambda}\pi\right) = tg\,i\,.\,tg\,r\,^{1}), \quad sin\,i = n\,sin\,r\,; \quad . \quad . \quad . \quad A)$$

n bedeutet dabei den sogenannten Brechungskoeffizienten des Metalls, d. h. die durch

$$n = tg\,\bar{\omega}$$

definierte Konstante, wo $\bar{\omega}$ den Polarisationswinkel vorstellt, so daß für $i = \bar{\omega}$ die Verzögerung $\delta = \frac{1}{4}\lambda$ wird.

Ist ferner $p:s = tg\,\beta$, so ist

$$tg\,2\,\beta = \frac{tg\,(2\,\beta_1)}{sin\left(\frac{\delta}{\lambda}\,2\,\pi\right)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad B)$$

wo β_1 der Wert von β für $i = \bar{\omega}$ ist; es ist das eine für das einzelne Metall charakteristische Konstante.

Weiter wird gezeigt, daß die Gesetze $A)$ und $B)$ die Erklärung aller bis dahin bei der Metallreflexion beobachteten Erscheinungen liefern, und schließlich wird eine allgemeine Formel für die bei einer beliebigen Zahl von Reflexionen an Metallflächen erzeugten Farben aufgestellt.

Bemerkt sei noch, daß Neumann in späterer Zeit eine wirkliche Theorie der Metallreflexion aufzustellen versucht hat. Näheres darüber findet man in den Berichten über das physikalische Seminar.

3. „Über die optischen Achsen und die Farben zweiachsiger Krystalle im polarisierten Licht." [Pogg. Ann. **33**, 257—281, 1834.]

Hier wird zunächst die Frage untersucht, was man unter den optischen Achsen eines zweiachsigen Kristalles zu verstehen hat. Brewster, der als erster die Erscheinungen dieser Klasse von Kristallen untersuchte, bezeichnete als Achsen die Richtungen,

---

[1]) In der ursprünglichen Arbeit steht *cotang* an Stelle von *tang*. Dieser Fehler ist von Neumann selbst in Pogg. Ann. **40**, 513—514, 1837, berichtigt. Es sei bemerkt, daß in dem eben erschienenen Bd. II von Neumanns gesammelten Werken eine sehr übersichtliche Entwicklung der Formeln $A)$, $B)$ auf Grund Neumannscher Vorlesungshefte mitgeteilt ist. Hier wird auch die Neumannsche Anschauung über die Schwingungsrichtung des polarisierten Lichtes zugrunde gelegt, während Neumann selbst sich bei der ersten Ableitung der Fresnelschen Anschauung angeschlossen hatte.

in denen der Kristall von denjenigen Strahlen durchlaufen ist, die von dem Mittelpunkt der im polarisierten Lichte entstehenden Farbenringe nach dem Auge gehen. Es entstand die Frage: Fallen diese Richtungen mit den Normalen der Kreisschnitte der Elastizitätsfläche zusammen, oder mit den Normalen der Kreisschnitte des Ellipsoids, dessen Radien die Geschwindigkeiten der Lichtstrahlen vorstellen? Fresnel scheint zuerst die erstere Annahme gemacht, sich später aber der zweiten zugewandt zu haben. Zur Erledigung der Frage untersucht Neumann den Gang der Strahlen durch ein von zwei parallelen Ebenen begrenztes Kristallblättchen und bestimmt (ohne irgend welche Annahme über das Gesetz der Brechung im Kristall) den Phasenunterschied desjenigen ordentlichen und außerordentlichen Strahles, die, an derselben Stelle austretend, den gleich gerichteten gebrochenen Strahl ergeben und somit interferieren. Für die scheinbaren optischen Achsen ist jener Phasenunterschied = 0. Daraus folgt, daß diese Achsen von Strahlen erzeugt werden, deren Wellennormalen parallel den Kreisschnitten der Elastizitätsfläche sind. Man muß daher die Normalen dieser Schnitte die wahren optischen Achsen nennen.

Außer der Feststellung des Begriffes der optischen Achsen enthält der Aufsatz noch eine Theorie der Farbenerscheinungen, welche ein Blättchen eines zweiachsigen Kristalls bei schiefem Durchgange des Lichtes zeigt. Es werden zu dem Zweck für die Intensität der beiden oben erwähnten interferierenden Strahlen angenäherte Ausdrücke aufgestellt, und mit deren Hilfe ein Ausdruck für die Intensität des Lichtes, welches aus der Interferenz entsteht, gefunden.

Zum Schluß endlich wird gezeigt, daß man für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der beiden zu einer Wellennormale gehörigen Wellen eines zweiachsigen Kristalles sehr einfache Ausdrücke gewinnt, wenn man statt der Richtungskosinus jener Normale ihre Winkel mit den optischen Achsen einführt. Dieses Resultat ist für die folgende große Arbeit über Kristallreflexion sehr wichtig. Der obige Ausdruck für die Phasendifferenz der interferierenden Strahlen vereinfacht sich dadurch erheblich.

4. Theoretische Untersuchung der Gesetze, nach welchen das Licht an der Grenze zweier vollkommen durchsichtigen Medien reflektiert und gebrochen wird.

In den Separatabzügen lautet der Titel zutreffender: Über den Einfluß der Krystallflächen bei der Reflexion des Lichtes und über die Intensität des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls. Gelesen in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 7. Dez. 1835. Abhandlungen der Berliner Akademie für das Jahr 1835, S. 1—160 (erschienen 1837).

Diese große Abhandlung bildet eine wesentliche Ergänzung zu Neumanns Theorie der doppelten Strahlenbrechung; muß doch eine vollständige Theorie nicht nur von den Bewegungen im Innern eines Mediums Rechenschaft geben, sondern auch von dem Übergang von einem Medium zum anderen. Sodann aber war zu entscheiden, ob sich bei Zugrundelegung der Neumannschen Definition der Polarisationsebene für die reflektierten Lichtmengen und die Drehung, welche die ursprüngliche Polarisationsebene durch Reflexion erleidet, die Fresnelschen, durch die Erfahrung als richtig erwiesenen Formeln ergeben. Eine Verneinung dieser Frage hätte die Grundlagen von Neumanns Theorie der doppelten Strahlenbrechung erschüttert. Es hätte zur Entscheidung dieser Frage genügt, nur den Vorgang an der Grenze zweier unkristallinischen Medien zu untersuchen, während Neumann dem Problem der Reflexion die größtmögliche Ausdehnung gibt und durch die glückliche Überwindung äußerst mühsamer Rechnungen zu einer Fülle von neuen Resultaten gelangt. Dabei zieht er sowohl einachsige, als zweiachsige Kristalle in den Kreis seiner Betrachtungen und behandelt alle diese Fälle auf Grund derselben einfachen Prinzipien.

Obwohl rein theoretisch wie die Arbeit über die doppelte Strahlenbrechung, hat diese Abhandlung doch einen wesentlich anderen Charakter. Hatte Neumann in jener Arbeit auf die allerersten Ursachen der Erscheinungen, nämlich auf die Kräfte, mit denen die einzelnen Ätherteilchen gegenseitig aufeinander einwirken, zurückgegriffen, und hatte er auf Grund dieser Kräfte und mittels der allgemeinen Gleichungen der Mechanik die Erscheinungen erklärt, so geht er hier von einem gewissen Kreise von Vorstellungen aus, die durch besondere Einfachheit ausgezeichnet sind, und deren Richtigkeit durch die Erfahrung höchst wahrscheinlich gemacht ist. Vor allem läßt er die longitudinale Welle, auf die er in der Theorie der doppelten Strahlenbrechung geführt war, ganz beiseite und nimmt die Lichtschwingungen als rein transversal an,

und zwar auch in den durch Reflexion und Brechung entstehenden Wellen. Freilich bringt diese Fortlassung der longitudinalen Wellen den Übelstand mit sich, daß man den strengen Grenzbedingungen der Elastizitätstheorie (Gleichheit der Verrückungen und Gleichheit der Komponenten des elastischen Drucks in der Grenzfläche) nicht genügen kann; denn diese strengen Bedingungen würden für vier zu bestimmende Größen sechs Bedingungsgleichungen ergeben, und zwar Bedingungsgleichungen, die miteinander unverträglich sind. Neumann beseitigt diese Schwierigkeit, indem er die völlige Kontinuität der Vibrationen beider Medien postuliert und dazu das Prinzip der lebendigen Kraft heranzieht. Er rechtfertigt die Benutzung dieses Prinzips mit der Erfahrung, daß es wirklich Körper gibt, bei denen die Intensität des einfallenden Lichtes genau ebensogroß ist wie die Summe der Intensitäten des reflektierten und gebrochenen Lichtes. Bemerkt sei, daß Kirchhoff (Über die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze kristallinischer Medien, Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften 1876, S. 57—89) nicht direkt das Prinzip der lebendigen Kraft benutzt, sondern einen auf die Grenzfläche wirkenden fremden, etwa von den wägbaren Teilen beider Medien herrührenden Druck annimmt, der den elastischen Kräften das Gleichgewicht hält, und dessen Arbeit verschwindet. Für die Partikularlösungen der allgemeinen Gleichungen, die ebene Wellen darstellen, folgt daraus die Gültigkeit des Satzes von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Die Vorstellungen, die der Neumannschen Reflexionstheorie zugrunde liegen, sind folgende:

1) Die Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Medien oder die Brechung des Lichtes rührt bei vollkommen durchsichtigen Medien allein her von der Verschiedenheit der Elastizität des Äthers; die Dichtigkeit desselben ist in allen diesen Medien gleich.

2) Das einfallende Licht besteht aus Transversalschwingungen und erzeugt bei der Reflexion und Refraktion nur ebensolche Schwingungen.

3) Die Richtung der Schwingungen liegt überall, in kristallinischen und nichtkristallinischen Medien, in der Wellenebene.

4) Die Polarisationsebene einer Wellenebene ist die durch ihre Normale und die Richtung ihrer Bewegung gelegte Ebene.

5) Die Komponenten der Bewegung, welche einem in der Grenzfläche gelegenen Teilchen von der einfallenden und den reflektierten Wellenebenen erteilt wird, sind gleich den Komponenten der Bewegung, welche ihnen von den gebrochenen Wellenebenen erteilt wird.

6) Die lebendige Kraft in der einfallenden Wellenebene ist gleich der Summe der lebendigen Kräfte in den reflektierten Wellenebenen und in den gebrochenen Wellenebenen.

Wegen der Gleichheit der Dichtigkeiten ist die lebendige Kraft in jeder der drei Wellen proportional dem Quadrat der Amplitude, multipliziert mit dem von den Bewegungen derselben Undulation eingenommenen Raume.

Von diesen Vorstellungen sind die in 1), 4) und 5) angegebenen deswegen besonders beachtenswert, weil sie den Unterschied der Neumannschen Auffassung gegenüber der Fresnelschen deutlich zutage treten lassen. Ad 1) nämlich nimmt Fresnel an, daß in allen Medien der Äther gleiche Elastizität, aber verschiedene Dichtigkeit habe; die verschiedene Dichtigkeit bedinge die Verschiedenheit des Brechungsvermögens. Diese Hypothese verwirft Neumann, da man in kristallinischen Medien wohl verschiedene Elastizität nach verschiedenen Richtungen annehmen kann, aber nicht verschiedene Dichtigkeit. Der Punkt 4) ist schon bei Besprechung der Arbeit über die doppelte Strahlenbrechung erörtert.

In 5) weicht Neumann insofern von Fresnel ab, als letzterer nur die Gleichheit der Schwingungskomponenten parallel der brechenden Fläche annimmt.

Die obigen Grundsätze werden nun zunächst angewandt auf die Reflexion an der Grenze zweier unkristallinischen Medien, und zwar zuerst für Licht, das senkrecht zur Einfallsebene schwingt, sodann für Schwingungen in der Einfallsebene. Im ersteren Falle ergeben die Grenzbedingungen 5), 6) zwei Gleichungen für zwei zu bestimmende Größen, eine lineare und eine quadratische, letztere aber läßt sich durch die erstere dividieren und reduziert sich somit ebenfalls auf eine lineare Gleichung. Diese drückt für unkristallinische Medien aus, daß der Druck auf die brechende Fläche, welcher durch die Verschiebung der Teile im ersten Medium entsteht, dieselbe Komponente senkrecht auf der Einfallsebene hat, wie der Druck, welcher durch die Verschiebung im zweiten Medium entsteht. Im zweiten Falle erhält man drei Gleichungen

zur Bestimmung zweier Größen, von denen aber die durch 6) gelieferte eine Folge der beiden anderen ist. Die neue Theorie gibt für die Intensitäten des reflektierten und gebrochenen Lichtes genau die Fresnelschen Formeln, die ihrerseits durch zahlreiche Beobachtungen bestätigt sind.

Nachdem sich so die an die Spitze gestellten Grundsätze bei unkristallinischen Medien bewährt haben, werden sie weiter auf den Fall angewendet, wo die Zurückwerfung und Brechung des Lichtes an der Grenze eines unkristallinischen und eines vollkommen durchsichtigen einachsigen kristallinischen Mediums geschieht. Hier erfordert die Lösung des Problems erheblich umfangreichere und kompliziertere analytische Entwicklungen. Die Komplikation rührt einmal von der verschiedenen Orientierung sowohl der brechenden Fläche, als der einfallenden Wellenebene gegen die rechtwinkligen Elastizitätsachsen des kristallinischen Mediums her. Da ferner die beiden gebrochenen Wellen gegebene Schwingungsrichtungen haben, so kann man nicht, wie vorher, die Fälle, wo das einfallende Licht parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, getrennt behandeln. Auch macht die Aufstellung des Ausdrucks für die lebendige Kraft der außerordentlichen gebrochenen Welle besondere Betrachtungen erforderlich. Denn denkt man sich in dem unkristallinischen Medium ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Grundflächen zwei Lagen der einfallenden Wellenebene sind, so hat sich die in diesem enthaltene Bewegung nach der Brechung auf ein schiefwinkliges Parallelepipedon ausgebreitet, das von zwei entsprechenden Lagen der gebrochenen außerordentlichen Wellenebene begrenzt wird. Die Grundsätze 5) und 6) liefern hier vier Gleichungen, die als Unbekannte enthalten: die beiden Komponenten der reflektierten Amplitude parallel und senkrecht zur Einfallsebene und die Amplituden der beiden gebrochenen Wellen. Von diesen Gleichungen sind drei linear und eine quadratisch; letztere läßt sich auch hier mittels der drei ersten auf eine lineare zurückführen, doch erfordert diese Reduktion eine längere Rechnung. Aus den so erhaltenen vier linearen Gleichungen, deren Auflösung keine Schwierigkeit bietet, wird nun eine Reihe von Folgerungen gezogen. Zunächst wird gezeigt, daß, wenn die beiden gebrochenen Wellen zusammenfallen, die Resultate in die für unkristallinische Medien gefundenen übergehen. Ferner werden die Gesetze der

Polarisation des von einer beliebigen Kristallfläche reflektierten Lichtes untersucht. Auch hier existiert, wie bei der Reflexion an unkristallinischen Medien, ein Polarisationswinkel; es ist derjenige Einfallswinkel, unter welchem natürliches Licht reflektiert werden muß, damit es vollständig polarisiert sei. Die Polarisationsebene des durch Reflexion vollständig polarisierten Lichtes fällt dann aber nicht mehr, wie bei unkristallinischen Medien, mit der Reflexionsebene zusammen, sondern bildet mit ihr einen Winkel, der die Ablenkung der Polarisationsebene genannt wird. Ein einfacher Ausdruck für den Polarisationswinkel ergibt sich nur, wenn die Reflexionsebene parallel mit dem Hauptschnitt der reflektierenden Ebene ist, während jener Winkel im allgemeinen von einer Gleichung vierten Grades abhängt; für die allein in Betracht kommende Wurzel dieser Gleichung wird eine Näherungsformel entwickelt. Die Resultate werden auf Beobachtungen angewandt, die Seebeck über den Polarisationswinkel am Kalkspat angestellt hat, und es zeigt sich, daß die beobachteten und berechneten Werte jenes Winkels für die verschiedensten Lagen der Reflexionsebene bis auf wenige Minuten übereinstimmen. „Ich glaube nicht“, sagt Neumann, „daß man eine größere Übereinstimmung der Beobachtungen mit der Theorie erwarten darf; sie bestätigt ebenso sehr die Richtigkeit der Theorie, als sie die große Geschicklichkeit des Beobachters erweist.“ Nachdem noch ein einfaches Theorem über die Beziehung zwischen dem Polarisationswinkel und der Ablenkung der Polarisationsebene abgeleitet ist, wird speziell der Fall untersucht, in dem das den einachsigen Kristall umgebende Medium nahezu denselben Brechungskoeffizienten hat wie der Kristall. Dieser Fall tritt ein, wenn auf der reflektierenden Fläche sich eine Schicht einer Flüssigkeit befindet, in welcher sich das Licht nahezu ebenso schnell bewegt, wie in dem Kristall. Dadurch werden einige Größen, welche von der Doppelbrechung abhängen, außerordentlich vergrößert, z. B. die Ablenkung der Polarisationsebene. Für diese Ablenkung ergeben die Neumannschen Formeln Werte, die mit Beobachtungen von Brewster auf einer mit Cassiaöl bedeckten natürlichen Bruchfläche des Kalkspats gut übereinstimmen. Weiter sind noch folgende Ergebnisse bemerkenswert. Wenn der Brechungskoeffizient des umgebenden Mediums zwischen dem gewöhnlichen und ungewöhnlichen des Kristalls liegt, ist unter Umständen der Po-

larisationswinkel unmöglich. Hat das umgebende Medium genau den gewöhnlichen Brechungskoeffizienten des Kristalls, so ist das reflektierte Licht stets vollständig polarisiert. Ist der Brechungskoeffizient des umgebenden Mediums wenig von denen des Kristalls verschieden, so findet unter allen Reflexionswinkeln nahezu eine vollständige Polarisation statt.

Doch nicht allein das Verhalten des reflektierten Lichtes ergibt sich aus den Grundformeln, sondern ebenso das der gebrochenen Strahlen. Es werden die Gesetze abgeleitet, nach welchen ein polarisierter Strahl bei seinem Eintritt in einen optisch einachsigen Kristall sich zwischen dem gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahl teilt. Es werden diejenigen Azimute der Polarisation des eintretenden Strahls bestimmt, bei welchen der gewöhnliche oder der ungewöhnliche Strahl verschwindet, wie auch die Intensität der beiden Strahlen für den Fall, daß das eintretende Licht unpolarisiert war.

Bezogen sich die bisherigen Betrachtungen auf die Phänomene, welche den Eintritt eines Lichtstrahls in ein einachsiges kristallinisches Medium begleiten, so wird weiter auch der Austritt eines Strahls aus einem solchen Medium untersucht. Hier entstehen aus jeder einfallenden Welle, sei dieselbe eine ordentliche oder außerordentliche, je zwei reflektierte Wellen. Die Ausdrücke für die Amplituden derselben werden entwickelt und auf den Fall der totalen Reflexion angewandt. Die Ausdrücke für die Amplituden der reflektierten Strahlen sind dann nicht mehr reell, lassen sich aber mittels desselben Räsonnements, das Fresnel auf den analogen Fall bei unkristallinischen Medien angewandt hat, interpretieren. Für den Fall der nicht totalen Reflexion werden auch die Intensitäten der beiden gebrochenen Wellen (deren eine durch eine einfallende ordentliche, die andere durch eine einfallende außerordentliche Welle entsteht) abgeleitet und die Lage ihrer Polarisationsebene bestimmt. Die Resultate gestatten die Beantwortung der Frage, wie das Licht eines polarisierten Strahls, nachdem es durch ein Prisma aus einem kristallinischen einachsigen Medium gegangen ist, sich verteilt hat zwischen dem gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahl. Speziell wird das erörtert für Prismen, deren brechende Kante der Kristallachse parallel ist oder auf ihr senkrecht steht. Auch der Durchgang des Lichtes durch ein von zwei parallelen Ebenen be-

grenztes kristallinisches Medium, das auf beiden Seiten von demselben unkristallinischen Medium umgeben ist, läßt sich auf Grund der allgemeinen Formeln vollständig erledigen. Von besonderem Interesse ist die Anwendung der gefundenen Ausdrücke auf den Fall, in dem das kristallinische Blättchen so dünn ist, daß sich der gewöhnliche und der ungewöhnliche Strahl nicht trennen. Hier wird unter anderem die Relation aufgestellt, die zwischen Einfallswinkel, Azimut der Einfallsebene und Azimut der ursprünglichen Polarisation bestehen muß, damit das durchgegangene Licht so vollständig als möglich polarisiert ist.

Noch umfassendere Rechnungen als bei einachsigen Kristallen erfordert die Untersuchung der Reflexion und Brechung bei zweiachsigen Kristallen, der der zweite Teil der Neumannschen Abhandlung gewidmet ist. Doch reichen auch hier die an die Spitze gestellten Grundsätze zur Erledigung der Aufgabe vollständig aus. Der Entwicklung der eigentlichen Reflexionsformeln ist ein einleitender Paragraph vorangeschickt, in dem die allgemeinen Formeln aufgestellt werden, wodurch für Wellenebenen von gegebener Normalenrichtung die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, die Richtungen ihrer Bewegungen und die Lage der zugehörigen Strahlen [1]) bestimmt werden. Letztere stehen, wie gezeigt wird, stets auf den Richtungen ihrer Undulationen senkrecht. Die Formeln für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden derselben Ebene parallelen Wellen erhalten einen sehr einfachen Ausdruck durch Einführung der Winkel, welche die Normale jener Ebene mit den optischen Achsen bildet. Auch auf die Erscheinungen der äußeren und inneren konischen Refraktion wird dabei eingegangen.

Bei der Erledigung der eigentlichen Aufgabe macht die Zurückführung der sich aus dem Prinzip der lebendigen Kraft ergebenden quadratischen Gleichung auf eine solche ersten Grades einige Schwierigkeiten. Damit jene Reduktion unter Benutzung

---

[1]) Der zu einer Wellenebene gehörige Strahl ist die Linie, in welcher sich der Durchschnittspunkt dieser Wellenebene mit anderen Wellenebenen, die in ihrer Richtung nur unendlich wenig verschieden von der ersten sind, bewegt. Oder anders ausgedrückt: Betrachtet man die Wellenebenen als Tangentialebenen der Wellenfläche, so ist die Wellennormale das Lot auf eine Tangentialebene, der Strahl der Radiusvektor nach dem Berührungspunkt dieser Tangentialebene.

der übrigen Grenzbedingungen gelingt, ist das Bestehen einer gewissen Gleichung nötig, von deren Richtigkeit Neumann selbst durch eine geometrische Konstruktion auf der Kugelfläche sich auf einem etwas mühsamen Wege überzeugt hat. Einen einfacheren Beweis für das Bestehen jener Relation hat Jacobi gefunden; er wird in der Abhandlung mitgeteilt, und daran werden noch andere analoge Relationen geknüpft, die im weiteren Verlauf der Arbeit Verwendung finden. So werden, ganz analog wie bei einachsigen Kristallen, für die Amplituden der gebrochenen Wellen sowie für die beiden Komponenten der Amplituden des reflektierten Lichtes vier lineare Gleichungen gewonnen, die sich leicht auflösen lassen. Die Resultate werden zunächst auf spezielle Lagen der Einfallsebene gegen die optischen Achsen angewandt. Eine andere Anwendung betrifft die konische Refraktion. In diesem Falle werden die Ausdrücke für die Amplitude des reflektierten und gebrochenen Lichtes unbestimmt. Man überwindet aber diese Schwierigkeit, wenn man sich den einfallenden Strahl aus einem Kegel dadurch entstanden denkt, daß die Kanten desselben mit seiner Achse zusammengefallen sind. So ergibt sich die Lichtintensität und die Lage der Polarisationsebene in den verschiedenen Seiten des Lichtkegels, in welchen der einfallende Strahl sich zerspaltet, und zwar zunächst für eine spezielle, sodann für eine beliebige Lage der brechenden Fläche. Ferner wird das wichtige Resultat abgeleitet, daß die konische Refraktion auf die Erscheinung der Reflexion keinen Einfluß hat. Auch die Verteilung des Lichtes in dem Refraktionskegel, wenn das einfallende Licht unpolarisiert war, wird erörtert, ebenso die Verteilung des Lichtes in dem Falle, wo das einfallende Licht nicht ein einfacher Strahl, sondern ein Strahlenzylinder ist.

Weitere Folgerungen aus den Grundgleichungen betreffen die Polarisation des reflektierten Lichtes. Die Berechnung des Polarisationswinkels, der genau wie bei einachsigen Kristallen definiert wird, läßt sich vollständig nur durchführen, wenn die Einfallsebene mit einer der drei rechtwinkligen Ebenen zusammenfällt, die durch die Elastizitätsachsen gelegt sind. Für die anderen Lagen der Einfallsebenen wird ein angenäherter Ausdruck aufgestellt, aus dem folgende zwei Sätze abgeleitet werden:

a) In jeder reflektierenden Ebene gibt es zwei aufeinander rechtwinklige Azimute der Einfallsebenen, in welchen der Winkel

der vollständigen Polarisation ein Maximum und ein Minimum ist. In Beziehung auf diese Azimute ist das System von Polarisationswinkeln der Ebene symmetrisch verteilt. Die zwei Einfallsebenen des größten und kleinsten Polarisationswinkels sind parallel dem größten und kleinsten Radiusvektor des Schnittes, den die reflektierende Ebene mit der Elastizitätsfläche bildet, durch deren Mittelpunkt gelegt.

b) Wenn die reflektierende Ebene senkrecht auf einer der optischen Achsen steht, sind die Winkel der vollständigen Polarisation in allen Azimuten gleich.

Was die Ablenkung der Polarisationsebene bei Reflexion unter dem Polarisationswinkel betrifft, so gibt es im allgemeinen vier Azimute der Reflexionsebene, für welche die Ablenkung $= 0$ ist; zwei von ihnen sind immer reell. Auch auf den reflektierenden Ebenen, die senkrecht auf den optischen Achsen stehen, findet sich, obgleich in allen Azimuten der Polarisationswinkel der gleiche ist, eine Ablenkung der Polarisationsebene, deren Größe von jenen Azimuten abhängt.

Auch die Drehung, welche die Polarisationsebene bei Reflexion unter einem beliebigen Winkel erleidet, wird untersucht. Dabei ergibt sich, daß diejenigen Strahlen, die, ursprünglich parallel der Einfallsebene oder senkrecht zu ihr polarisiert, nach der Reflexion ihre Polarisationsebene unverändert beibehalten, auf einem Kegel dritter Ordnung liegen; dieser Kegel ist wichtig für die Untersuchung der Fälle, in welchen, unter den beiden genannten Annahmen über die Polarisation des einfallenden Lichtes, im gebrochenen Lichte einer der beiden Strahlen verschwindet. Dieselbe Frage wird sodann aber auch allgemein erledigt, indem dasjenige Azimut der ursprünglichen Polarisationsebene bestimmt wird, bei welchem einer der beiden gebrochenen Strahlen verschwindet. Die Ausdrücke für die Amplituden des reflektierten und des einen gebrochenen Strahles gestalten sich dann besonders einfach.

In ähnlicher Weise, wie der Eintritt des Lichtes in ein zweiachsiges Medium, wird zum Schluß auch der Austritt des Lichtes aus einem solchen in ein unkristallinisches Medium behandelt, und die Resultate werden auf den Durchgang des Lichtes durch ein von parallelen Ebenen eingeschlossenes Medium angewandt. Die abgeleiteten Formeln, deren Wiedergabe hier zu weit führen würde, sind wichtig für die Theorie der Farben, welche kristallinische

Blättchen im polarisierten Lichte zeigen. Aus den in Rede stehenden Formeln ergeben sich übrigens, wenn man alles, was vom Unterschiede der Elastizitätsachsen abhängt, vernachlässigt, dieselben Näherungsformeln, die Neumann in einer anderen Arbeit (s. S. 79) direkt abgeleitet hatte.

5. Prioritätsstreit mit Mac Cullagh. An die eben besprochene Arbeit schloß sich ein Prioritätsstreit mit Mac Cullagh. Letzterer Forscher hatte sich um dieselbe Zeit wie Neumann mit dem Problem der Kristallreflexion beschäftigt und war im wesentlichen von denselben Grundvorstellungen ausgegangen wie Neumann. Er war jedoch zunächst (1835) zu Ergebnissen (veröffentlicht im Februar 1836 im Phil. Mag.) gelangt, die, wie Seebeck 1836 (Pogg. 38) zeigte, mit der Beobachtung nicht übereinstimmten. Auf Grund der Seebeckschen Bemerkungen hat dann Mac Cullagh seine Theorie modifiziert; seine neuen Resultate sind in dem Phil. Mag. X (1837) veröffentlicht. Da diese Veröffentlichung etwas eher als Neumanns große Arbeit erschienen war, nahm Mac Cullagh Neumann gegenüber die Priorität für sich in Anspruch, und ihm stimmte Hamilton bei. In einem Briefe an letzteren (abgedruckt in den Proceedings of the Royal Irish Academy, 1838, No. 30) erhob Neumann dagegen Widerspruch und legte den Sachverhalt dar. Er habe, sagt er, von seinen Resultaten schon 1833 und 1834 verschiedenen Gelehrten, unter anderen A. Seebeck, Mitteilung gemacht, auch einen Auszug seiner Abhandlung 1834 an Arago zum Abdruck in den Annales de Chimie et de Physique geschickt, der aber nicht in des Adressaten Hände gelangt sei. Im übrigen habe er das schon 1834 vollendete Manuskript im Dezember 1835 der Berliner Akademie übergeben. Der letztere Umstand ist jedenfalls entscheidend für die Priorität Neumanns. Neumann ist der erste, der die richtigen Formeln für die Kristallreflexion abgeleitet hat. Daß Mac Cullagh unabhängig von Neumann zu denselben Resultaten gelangt ist, ist nicht zu bezweifeln. Die Priorität aber kommt Neumann zu, und die Bemerkungen, die Mac Cullagh an Neumanns Brief geknüpft hat, können das Ergebnis nicht umstoßen.

An die große Arbeit über Kristallreflexion schließen sich die folgenden beiden 1837 in Pogg. Ann. veröffentlichten Aufsätze an. Ihre Titel sind:

6. Photometrisches Verfahren, die Intensität der ordentlichen und außerordentlichen Strahlen, sowie die des reflektierten Lichtes zu bestimmen; Bemerkungen zu Herrn Cauchys Vervielfältigung des Lichtes in der totalen Reflexion; Reproduktion der Fresnelschen Formeln über totale Reflexion (Pogg. Ann. 40, 497—514).

7. Beobachtungen über den Einfluß der Krystallflächen auf das reflektierte Licht und über die Intensität des ordentlichen und außerordentlichen Strahles. (Pogg. Ann. 42, 1—30.)

In beiden Arbeiten wird das folgende eigenartige Verfahren auseinandergesetzt, um dieselbe Aufgabe, die in der Arbeit über Kristallreflexion theoretisch gelöst ist, rein experimentell zu lösen, d. h. um die Verteilung des Lichtes, wenn es auf die Oberfläche eines durchsichtigen kristallinischen Mediums fällt, zwischen dem reflektierten Strahle, dem ordentlichen und dem außerordentlichen Strahle zu finden. Die einfallende polarisierte Welle denke man in zwei andere zerlegt, deren erste parallel der Einfallsebene polarisiert ist, die zweite senkrecht dazu; ihre Amplituden seien bzw. S und P. Die reflektierte Welle, auf gleiche Weise zerlegt, habe die Amplituden R_s und R_p. Endlich seien die Amplituden der gebrochenen ordentlichen Welle D', die der außerordentlichen D''. Da die letzteren vier Größen lineare Funktionen der beiden ersten sein müssen, setze man:

$$R_p = p\,P + s'\,S, \quad R_s = p'\,P + s\,S,$$
$$D' = \pi'\,P + \sigma'\,S, \quad D'' = \pi''\,P + \sigma''\,S.$$

Dann kann man zunächst die Verhältnisse $\pi' : \sigma'$ und $\pi'' : \sigma''$ bestimmen, indem man dasjenige Polarisationsazimut des einfallenden Strahles aufsucht, bei welchem der ordentliche, bzw. der außerordentliche Strahl verschwindet. Ferner ergeben sich die Verhältnisse der Faktoren p, s', p', s, wenn man zu drei gegebenen Werten des Polarisationsazimuts des einfallenden Lichtes das zugehörige Polarisationsazimut des reflektierten Lichtes beobachtet. Zur Ermittelung der noch fehlenden drei Faktoren $p, s', \ldots, \sigma''$ dient die Gleichung, welche die vollkommene Durchsichtigkeit des kristallinischen Mediums ausdrückt:

$$P^2 + S^2 = R_p^2 + R_s^2 + \alpha'\,D'^2 + \alpha''\,D''^2,$$

eine Gleichung, aus der, da sie für beliebige Werte von P und S gilt, drei Relationen zwischen den Koeffizienten folgen. In der ersten der beiden in Rede stehenden Arbeiten wird das Verfahren an einer kleinen Reihe von Beobachtungen erläutert, während in der zweiten Arbeit sieben größere Reihen von sehr sorgfältigen Beobachtungen, sämtlich an der natürlichen Bruchfläche des Kalkspats angestellt, mitgeteilt werden. Diese sämtlichen Beobachtungen stimmen sehr gut mit den numerischen Resultaten überein, die aus den theoretischen Formeln der Kristallreflexion folgen. Die Abweichung zwischen Rechnung und Beobachtung beträgt fast durchweg nur wenige Minuten. Das Instrument, mit dem die Beobachtungen angestellt sind, zu beschreiben, würde hier zu weit führen, ebensowenig wie wir auf die Beobachtungen selbst und die Art, wie dieselben zur Elimination der möglichen Fehler kombiniert werden, eingehen können. Bemerkt werden aber muß, daß derartige Messungen vor Neumann nicht angestellt sind, da sich frühere Beobachter (z. B. Seebeck) auf die Beobachtungen der vollständigen Polarisation des natürlichen Lichtes durch Reflexion beschränkten. Auch auf diese Seebeckschen Beobachtungen geht Neumann ein und zeigt ihre Übereinstimmung mit seinen Formeln. Die Formeln für die Koeffizienten α', α'' findet Neumann ebenfalls experimentell bestätigt; er schließt daraus, daß seine theoretischen Formeln nur in der Voraussetzung als wirklich erwiesen angesehen werden können, daß in allen Medien der Äther dieselbe Dichtigkeit hat.

Die erste der beiden jetzt in Rede stehenden Arbeiten enthält noch folgendes. Zunächst wird gezeigt, daß zur Herleitung der Fresnelschen Formeln für die Intensität des an unkristallinischen Medien reflektierten und gebrochenen Lichtes nur die Gleichung, welche die vollkommene Durchsichtigkeit ausdrückt, verbunden mit den aus den Brewsterschen Beobachtungen folgenden Formeln für $R_p : R_s$ und $D_p : D_s$ (R bezieht sich auf das reflektierte, D auf das gebrochene Licht) nötig ist, daß somit die Fresnelschen Formeln vollständig und allein aus der Beobachtung erwiesen sind.

Weiter wird darauf hingewiesen, daß der von Cauchy aus seinen Formeln gezogene falsche Schluß, wonach in dem Augenblicke, wo die totale Reflexion eintritt, der gebrochene Strahl, statt zu verschwinden, eine außerordentliche Vervielfältigung er-

fahren soll, daher rührt, daß Cauchy als Verhältnis der Intensität des gebrochenen und des einfallenden Lichtes das Verhältnis der Quadrate ihrer Amplituden genommen habe, statt des Verhältnisses ihrer lebendigen Kräfte.

Endlich wird noch gezeigt, wie die Cauchysche direkte Ableitung der Formeln für Totalreflexion durch Einführung von Exponentialfunktionen neben den trigonometrischen (eine Ableitung, welche die willkürliche Fresnelsche Interpretation der imaginären Ausdrücke vermeidet) sich bei Zugrundelegung der Neumannschen Grundprinzipien der Reflexion gestaltet. Dabei wird die Gleichung der lebendigen Kraft ersetzt durch die aus ihr folgende lineare Gleichung, deren Bedeutung für unkristallinische Medien oben angegeben ist (s. S. 83).

b) Andere der Kristallphysik angehörige Arbeiten.

1. Die thermischen, optischen und krystallographischen Achsen des Krystallsystems des Gipses. [Pogg. Ann. 27, 240—274, 1833.]

Die Arbeit beginnt mit allgemeinen Erörterungen, die zu dem Resultate führen, daß es in allen kristallinischen Formen ein rechtwinkliges kristallographisches Achsensystem gibt, das identisch ist mit dem der thermischen und dem der Hauptdruckachsen; mit diesem System fällt unter gewissen Voraussetzungen über die Struktur des Mediums das der optischen Hauptachsen und das Achsensystem der Kohäsionskräfte zusammen. Zur Prüfung dieses Satzes untersucht Neumann die Lage der optischen und thermischen Achsen des Gipses. Einleitend beschreibt er die bis dahin am Gipssystem beobachteten Kristallflächen und teilt einige neue, von ihm an Gipskristallen angestellte Winkelmessungen mit, auf Grund deren er die Messungen von Phillips (El. Introd. to the Kn. of Mineralogy. Third. Ed., London 1823) diskutiert. Sodann zeigt er, daß die Bestimmung der thermischen Achsen in einem zwei- und eingliedrigen System sich darauf reduziert, in der die Gestalt symmetrisch teilenden Ebene zwei aufeinander senkrechte Linien zu finden, welche auch nach der Temperaturveränderung rechtwinklig gegeneinander geneigt sind. Diese gesuchten Linien ergeben sich, falls man die absolute Ausdehnung zweier beliebigen Linien der Symmetrieebene und die Änderung ihres Neigungs-

winkels kennt, mittels einer quadratischen Gleichung, von der sich zeigen läßt, daß sie stets zwei reelle Wurzeln hat. Nach diesem Verfahren werden die thermischen Achsen des Gipses bestimmt; die eine liegt sehr nahe der Normale der schiefen Endfläche. Weiter werden noch die linearen Ausdehnungen in verschiedenen Richtungen, insbesondere die in den thermischen Achsen stattfindenden, bestimmt; endlich wird gezeigt, daß beim Gips, innerhalb der Beobachtungsfehler, die thermischen und die optischen Achsen zusammenfallen, und daß die Flächen des Gipssystems zu diesen Achsen in einfacher Beziehung stehen.

Hinsichtlich der hier ausgesprochenen allgemeinen Sätze hat sich Neumanns Anschauung in späterer Zeit geändert, wozu wohl seine eigenen, in der folgenden Arbeit mitgeteilten Beobachtungen den Anstoß gegeben haben mögen. Er hat (s. Gesammelte Werke 2, 296) in den fünfziger Jahren in seinen Vorlesungen über Mineralogie ausdrücklich darauf hingewiesen, daß von einem genauen Zusammenfallen der optischen Hauptachsen mit den thermischen schlechterdings nicht die Rede sein könne. Ferner hat er zwar daran festgehalten, daß es in jedem Kristall ein „unwandelbares Koordinatensystem" geben muß, daß aber das System der optischen Hauptachsen nur etwas Sekundäres sei.

2. Über die optischen Eigenschaften der hemiprismatischen oder zwei- und eingliedrigen Krystalle. (Aus brieflichen Mitteilungen an Poggendorf.) (Pogg. Ann. 35, 81—95, 203—205, 380—383, 1835.)

Es wird zunächst das von Nörrenberg beobachtete Verhalten der optischen Achsen des Gipses besprochen, das sich daraus erklärt, daß jede Farbe ihre eigenen Elastizitätsachsen hat, die nicht allein der Größe, sondern auch der Lage nach verschieden sind. Weiter teilt Neumann eine eigene Beobachtung mit, wonach sich bei einer Temperaturerhöhung die beiden optischen Achsen des Gipses mit verschiedener Geschwindigkeit bewegen. Seine Messungen ergaben folgende Resultate. Bei 16,2° R ist die Neigung der optischen Achsen 57° 37′, bei 7,5° R = 61° 24′, und zwar hat sich die rote Achse um 1° 32′, die matte um 2° 15′ verrückt. Die größte und die kleinste Elastizitätsachse haben ihre Richtung dabei um 22′ geändert.

Bei einer Temperaturerhöhung von 15,3° R auf 52,2° R hat sich die rote Achse um 9° 13′, die matte um 13° 39′ verrückt.

Beide Achsen vereinigten sich bei einer Temperatur zwischen 70 und 80° R, und bis dahin hatte sich die rote Achse um 25° 8′ bewegt, die matte um 32° 49′.

Es folgen weitere Beobachtungen Neumanns, sowie solche, die auf seine Veranlassung von Hesse angestellt sind; beide zeigen, daß die Richtung, nach der ein senkrecht auf ein Gipsblättchen fallender Strahl polarisiert sein muß, damit er ungeteilt hindurch geht, mit der Halbierungslinie des Winkels der optischen Achsen zusammenfällt.

Ferner teilt Neumann mit, daß er die von Nörrenberg an Gips und Borax entdeckte Unsymmetrie der Farbenerscheinungen in den Ringsystemen auch am Adular beobachtet habe. Jene Unsymmetrie sei die Regel beim hemiprismatischen (zwei- und eingliederigen) System; die Fälle, wo die Unsymmetrie verschwinde, wie nach Beobachtungen von Dove beim Diopsid, seien Grenzfälle. — Schließlich wird noch darauf hingewiesen, daß das Verhalten des tetarto-prismatischen (ein- und eingliederigen) Systems ein wesentlich anderes sei.

3. Über das Elastizitätsmaß krystallinischer Substanzen der homoedrischen Abteilung. (Pogg. Ann. 31, 177—192, 1834.)

Der Umstand, daß experimentelle Untersuchungen über den Wert der Elastizitätskonstanten kristallinischer Substanzen gänzlich fehlen, veranlaßt Neumann, die Gesetze der einfachsten Elastizitätsphänomene zu geben, und zwar solche, die am meisten geeignet scheinen, die Mittel zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten auch bei kleinen Dimensionen der zu untersuchenden Substanz zu liefern. Er beschränkt sich dabei auf kristallinische Substanzen der homoedrischen Abteilung, das sind solche, deren Gestalten durch drei rechtwinklige Ebenen symmetrisch geteilt werden können. Die Verkürzungen, welche derartige Kristalle durch überall gleichen, gegen die Oberfläche senkrechten Druck D in den einzelnen Achsenrichtungen erleiden, hängen von neun Elastizitätskonstanten ab, die sich aber auf sechs reduzieren. Man erhält diese Konstanten, indem man ein rechtwinkliges Prisma, dessen Kanten den Kristallachsen parallel sind, durch Druck auf je zwei gegenüberliegende Seitenflächen komprimiert und jedesmal die Verkürzung in Richtung der drei Achsen mißt. Die genannten sechs Konstanten hängen übrigens durch einfache lineare

Gleichungen mit den theoretischen Elastizitätskonstanten zusammen, die in der Abhandlung über doppelte Strahlenbrechung auftreten und dort mit A, A_1, A_{11}, B, C, D bezeichnet sind. Aus diesem Zusammenhange ergibt sich nebenbei für unkristallinische Medien das Poissonsche Theorem über die Querkontraktion bei Längendehnung eines Drahtes; und zwar gilt dasselbe, unabhängig von den Dimensionen, für jedes Prisma.

Weiter wird erörtert, wie man aus der Lage der Kristallachsen und deren Verkürzung (oder Verlängerung) durch Druck die in einer beliebigen anderen Richtung eintretende Verkürzung bestimmen kann; ebenso die Winkeländerungen, welche in der Neigung zweier Ebenen durch Kompression hervorgebracht werden. Wird ein beliebig orientiertes rechtwinkliges Prisma durch einen Druck auf die Grundflächen komprimiert, so werden die Kanten desselben verkürzt und zugleich aus ihren rechtwinkligen Neigungen abgelenkt. Diese Verkürzung sowohl, als die Winkeländerung lassen sich durch die Elastizitätskonstanten ausdrücken. Daraus folgt die Verkürzung in einer beliebigen Richtung, und aus dem Ausdruck für letztere ergibt sich ein Ausdruck für das Elastizitätsmaß in einer bestimmten Richtung durch einfache Übertragung der Definition des Elastizitätsmaßes, die für unkristallinische Medien gilt. Um das Elastizitätsmaß in jeder Richtung zu kennen, muß dasselbe für sechs verschiedene Richtungen gegeben sein. Um ferner für sechs Richtungen das Elastizitätsmaß experimentell zu ermitteln, bedient man sich am besten der Methode der Biegung, indem man einen dünnen prismatischen Stab an einem Ende horizontal befestigt und am anderen mit Gewichten beschwert, oder auch, indem man beide Enden auf eine horizontale Unterlage legt und die Mitte mit Gewichten beschwert. Diese Methode ist also auf sechs in verschiedenen Richtungen geschnittene Stäbchen anzuwenden.

Ein zweites Mittel bieten Beobachtungen der Winkeländerungen, welche in den Neigungen der Seiten eines geraden Prismas hervorgebracht werden, wenn dieses in der Richtung der Achse komprimiert wird. Doch findet man so nur die Differenz der Elastizitätskonstanten, so daß eine Beobachtung nach der Biegungsmethode immer notwendig bleibt.

Die hier von Neumann zugrunde gelegte Elastizitätstheorie beruht auf Poissons molekulartheoretischer Betrachtung; in

späteren Jahren (1857—1874) hat Neumann in seinen Vorlesungen eine allgemeinere Theorie entwickelt, die von molekulartheoretischer Spekulation frei war. Diese macht die elastischen Erscheinungen eines Kristalls von 36 Konstanten abhängig, die sich für ein dreifach symmetrisches System auf neun reduzieren. Aufklärung über die Zahl der einem Kristallsystem zukommenden, voneinander unabhängigen Konstanten zu gewinnen, bezeichnet Neumann als einen Hauptzweck von Beobachtungen der hier beschriebenen Art. Er hat, um diese wichtige Frage zu erledigen, noch Ende der sechziger und Anfang der siebziger Jahre verschiedene seiner Schüler zu derartigen Beobachtungen angeregt (Sohncke, Baumgarten, W. Voigt).

c) Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichts in comprimierten oder ungleichmäßig erwärmten unkrystallinischen Körpern.

Eine am 8. November 1841 in der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin gelesene Abhandlung. Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1841. Zweiter Teil. Berlin 1843. S. 1—247 [1]), nebst sechs Seiten Verbesserungen und einer Tafel.

Diese umfangreiche Arbeit ist für Neumanns Art der Forschung besonders charakteristisch. In ihr tritt seine meisterhafte Art und Weise hervor, die Theorie mit dem Experiment zu verbinden, jene durch diese zu kontrollieren, andererseits für diese aus jener neue Anregungen und Befruchtungen herzuleiten. Als erster unternimmt er es hier, eine Theorie der im Titel genannten Erscheinungen, der sogenannten accidentellen Doppelbrechung, zu entwickeln und daran eine Fülle von Anwendungen zu knüpfen, die, wie Voigt S. 16 sagt, „ganz unabhängig von dem Interesse, welches die betreffenden Erscheinungen bieten, schon durch die neuen Fragestellungen merkwürdig sind, auf die sie führen“. Ganz nebenbei werden, in einer Anmerkung versteckt, die Grundzüge einer neuen, von der Cauchy schen ganz verschiedenen Dispersionstheorie entwickelt.

---

[1]) Ein Auszug aus der Arbeit ist in Pogg. Ann. **54**, 449—476, 1841, veröffentlicht.

Nach Neumanns Ansicht rührt die Dispersion ganz oder teilweise von den Kräften her, welche zwischen den schwingenden Teilen des Lichtäthers und den ponderablen Atomen des durchsichtigen Stoffes wirksam sind. Diese neuen Kräfte modifizieren nicht allein die Bewegung der Ätherteilchen, sondern setzen auch die Teile des festen Körpers in Bewegung. Die letztere Bewegung ist aber bei vollkommen durchsichtigen Körpern als sehr klein zu betrachten gegen die Bewegung der Ätherteilchen und kann daher in erster Annäherung vernachlässigt werden. Bei dieser Vernachlässigung werden die Komponenten der neuen Kräfte den Projektionen der Verrückungen der Ätherteilchen proportional, und diese neuen Kräfte sind in den Differentialgleichungen der Lichtbewegung, die für den freien Äther gelten, hinzuzufügen. In einem derartigen Medium ergibt sich, falls es isotrop ist, für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v einer ebenen Welle von der Schwingungsdauer T angenähert der Wert

$$v^2 = k(1 + MT^2),$$

wo k und T Konstante sind.

Die hier von Neumann dargelegte Grundanschauung über die Ursache der Dispersion ist von vielen späteren Autoren zur Erklärung der Farbenzerstreuung herangezogen, ohne daß diesen, wie es scheint, bekannt geworden ist, daß Neumann als erster diese Erklärung gegeben hat. Übrigens sei bemerkt, daß fast um dieselbe Zeit eine der Neumannschen sehr ähnliche Theorie von O'Brien aufgestellt ist (1842).

Gehen wir nun auf den Inhalt der Abhandlung etwas näher ein. Neumann geht von dem durch Brewster (Phil. Trans. 1816) entdeckten und durch spätere Beobachtungen bestätigten Gesetze aus, daß in einem unkristallinischen Körper, in welchem durch Kompression oder Dilatation doppelte Strahlenbrechung hervorgebracht ist, die Größe dieser Doppelbrechung eine lineare Funktion der Kontraktionen oder Dilatationen der Teilchen des Körpers ist. Den Zusammenhang zwischen diesen Dilatationen und der Doppelbrechung entwickelt er zunächst (§ 1 bis 4) für gleichförmig dilatierte oder komprimierte Körper, d. h. für solche, bei denen die Hauptdruckachsen in jedem Punkte dieselbe Richtung haben und die Größe der Dilatationen in ihnen für alle Punkte die gleiche ist, wie dies z. B. der

Fall ist, wenn ein rechtwinkliges Parallelepipedon in einer oder zwei oder drei Richtungen durch Druckkräfte, welche über je zwei seiner gegenüberstehenden Seitenflächen gleichmäßig verteilt sind, komprimiert wird. In einem derartigen Körper ist die neue Anordnung seiner Teilchen in jedem Punkte symmetrisch in bezug auf drei rechtwinklige Ebenen, die für jeden Punkt dieselbe Richtung haben. Zur Erklärung der Tatsache, daß ein solcher Körper durch die Verrückung seiner Teilchen die Eigenschaft erlangt hat, das Licht doppelt zu brechen, kann man nun drei Hypothesen aufstellen. Entweder liegt der Grund in einer durch die veränderte relative Lage der Teile des festen Körpers hervorgebrachten neuen Anordnung der in ihm enthaltenen Lichtätherteilchen, oder in der veränderten Einwirkung der Teile des festen Körpers auf die Ätherteilchen, oder in einer gleichzeitigen Wirkung beider Ursachen. Um zwischen diesen Hypothesen zu entscheiden, wird die zweite rechnend verfolgt.

Die Wirkung der Körpermoleküle auf die Ätherteilchen wird in derselben Weise in Rechnung gezogen wie in der oben dargelegten Neumannschen Dispersionstheorie, nur sind wegen der Ungleichheit der Hauptdruckachsen die Koeffizienten der in den Elastizitätsgleichungen anzubringenden Zusatzglieder andere als für isotrope Körper. Die Integration der so modifizierten Gleichungen ergibt eine Doppelbrechung von der Art, daß die Differenz der Geschwindigkeiten zweier zusammengehörigen Strahlen dem Quadrat der Undulationsdauer proportional sein müßte, also kleiner für die Strahlen des violetten Endes des Farbenspektrums als für die Strahlen des roten Endes. Daraus würde in den Interferenzerscheinungen der gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahlen eine Farbenfolge entstehen, welche die entgegengesetzte von derjenigen ist, die man beobachtet. Die Hypothese also, daß die Doppelbrechung des komprimierten Körpers allein von einer Veränderung in der Einwirkung der festen Teile auf den Äther herrühre, muß aufgegeben werden, da sie der Erfahrung widerspricht. Aus dem gleichen Grunde ist auch die Annahme, die Doppelbrechung rühre gleichzeitig von der veränderten Anordnung der Ätherteilchen und der veränderten Einwirkung der Teile des festen Körpers auf dieselben her, zu verwerfen; wenigstens müßte der von der letzteren Einwirkung etwa herrührende Teil der Doppelbrechung verschwindend klein sein gegen den von

der veränderten Anordnung der Ätherteilchen herrührenden Teil. Als vorzüglichster Erklärungsgrund der Doppelbrechung des komprimierten Körpers ist hiernach allein die neue Anordnung der Ätherteilchen zu berücksichtigen, und zwar muß diese Anordnung dieselbe Symmetrie besitzen wie die der festen Teile des Körpers. Hieraus wird geschlossen, daß die Doppelbrechung des gleichförmig dilatierten und komprimierten Körpers dieselben Gesetze befolgen muß, welche Fresnel für die Doppelbrechung in kristallinischen Medien entdeckt hat. Der einfachste Ausdruck für diese Gesetze ist in ihrer geometrischen Konstruktion mittels der optischen Elastizitätsfläche enthalten. Die Achsen dieser optischen Elastizitätsfläche und der Elastizitätsfläche des Druckes müssen in dem komprimierten Körper dieselbe Richtung haben, und die ersteren müssen Funktionen der letzteren sein, und zwar findet Neumann für diese Funktionen folgenden Ausdruck. Sind A, B, C die optischen Elastizitätsachsen, α, β, γ die Dilatationen in den entsprechenden drei Hauptdruckachsen, so ist

$$\begin{aligned} A &= G + q\alpha + p\beta + p\gamma, \\ B &= G + p\alpha + q\beta + p\gamma, \\ C &= G + p\alpha + p\beta + q\gamma. \end{aligned}$$

Darin sind p und q zwei von der Natur des dilatierten Mediums abhängige Konstante, G ist von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in dem Medium im natürlichen Zustande sehr wenig unterschieden. Aus den vorstehenden Relationen zwischen den Achsen beider Elastizitätsflächen ergibt sich eine Reihe bemerkenswerter geometrischer Folgerungen, z. B., daß beide Flächen die Kreisschnitte gemeinsam haben, und daraus folgt weiter, daß, wenn eine ebene Lichtwelle durch einen gleichförmig dilatierten Körper geht, diese polarisiert ist entweder parallel mit der größten oder der kleinsten Dilatation aller der Richtungen, die mit ihr parallel sind. Je nachdem diese Welle nach der einen oder der anderen dieser beiden Richtungen polarisiert ist, pflanzt sie sich mit einer anderen Geschwindigkeit fort, und der Unterschied dieser beiden Geschwindigkeiten ist proportional mit dem Unterschiede der größten oder kleinsten der mit ihrer Ebene parallelen Dilatationen des Körpers.

Nachdem so die Grundgesetze der Doppelbrechung der gleichförmig komprimierten Medien festgestellt sind, geht Neumann

dazu über, die numerischen Werte der beiden Konstanten p, q, von denen die Doppelbrechung abhängt, für gewöhnliches Spiegelglas zu bestimmen. Dazu dient eine sinnreiche Kombination zweier ganz verschiedenen Beobachtungen. Die erste betrifft die Lage der Farbenkurven, welche ein gekrümmter Glasstreifen im polarisierten Lichte zeigt. Diese Beobachtung gibt den Wert von $\frac{p-q}{g^2}$, wenn g die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Glase in seinem natürlichen Zustande bezeichnet, und zwar war

$$\frac{p-q}{g^2} = 0{,}126;$$

dabei ist für die mittleren Strahlen $g = 0{,}654$, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in Luft als Einheit angenommen.

Eine zweite Beobachtung betrifft das teleskopische Diffraktionsbild, welches durch zwei gleiche Öffnungen in einem Schirme vor dem Fernrohr hervorgebracht wird. Wird vor diese Öffnung ein gekrümmter Glasstreifen gestellt, so verdoppelt sich das Bild; es entstehen zwei Bilder, deren eines parallel mit dem Streifen, das andere senkrecht darauf polarisiert ist. Beide erleiden gegenüber dem ursprünglichen Bilde eine Verrückung nach derselben Richtung. Das Verhältnis dieser beiden Verrückungen ist unabhängig von der Größe der Krümmung und hängt nur linear von $\frac{p}{g}$ und $\frac{q}{g}$ ab. Die Messung des Verhältnisses jener Verrückung gibt demnach eine zweite Relation zwischen $\frac{p}{g}$ und $\frac{q}{g}$, die mit dem Wert von $\frac{p-q}{g}$ zusammen

$$\frac{p}{g} = -0{,}131, \quad \frac{q}{g} = -0{,}213$$

ergibt. Sehr merkwürdig ist das Resultat, welches man aus den allgemeinen Werten für A, B, C erhält, wenn darin $\alpha = \beta = \gamma$ gesetzt wird. In diesem Falle erhält man eine Verminderung der Lichtgeschwindigkeit bei Dilatation, trotzdem bei dieser die Dichtigkeit geringer geworden ist. Doch ist die Richtigkeit dieses Resultats neuerdings in Frage gestellt.

Im zweiten Abschnitt (§ 5 bis § 9) werden die allgemeinen Formeln für die Farbenerscheinungen entwickelt, welche ein un-

gleichförmig dilatierter Körper im polarisierten Lichte zeigt, d. h. ein solcher, in dem die Hauptdruckachsen sowohl in ihrer Richtung, als in ihrer Größe von Ort zu Ort sich ändern.

Während ein gleichförmig dilatierter Körper sich für das Licht wie ein Kristallindividuum verhält, ist ein ungleichförmig dilatierter Körper einem Aggregat von unendlich vielen sehr kleinen Kristallindividuen zu vergleichen, deren optische Elastizitätsachsen stetige Funktionen des Ortes sind, sowohl in Beziehung auf ihre Richtung, als ihre Größe. Wenn ein polarisierter Strahl auf ein solches Aggregat trifft, so teilt er sich nicht allein bei seinem Eintritt in zwei rechtwinklig polarisierte Strahlen, sondern auf jeder Stelle der Bahn teilt sich jeder Strahl, sowie er in ein neues Kristallindividuum tritt, wieder in zwei Teile. Die hiernach sehr schwierig erscheinende Untersuchung wird nun sehr vereinfacht, wenn die Unterschiede der optischen Elastizitätsachsen so klein sind, daß ihre Quadrate als verschwindend gegen die ersten Potenzen behandelt werden können. Unter dieser Voraussetzung zeigt Neumann, daß 1. die Bahnen der Lichtstrahlen im Innern des Körpers bei der Berechnung der Interferenz als geradlinig betrachtet werden können, 2. daß die nach dem Austritt miteinander interferierenden Strahlen so behandelt werden können, als hätten sie das Medium in derselben Richtung durchlaufen. Mit Hilfe dieser Sätze wird der allgemeine Ausdruck für die Differenz der Verzögerungen, mit welchen die miteinander interferierenden Strahlen aus dem Körper heraustreten, berechnet. Diese Differenz hängt ab von dem Gesetz der Drehungen, welchen die Polarisationsebene des Strahles im Innern des Körpers unterworfen ist, und von dem Gesetz seiner Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Beide müssen als Funktionen des Ortes gegeben sein, und diese Funktionen ihrerseits lassen sich aus dem System der Verrückungen der Teilchen des Körpers ableiten; letzteres System muß gegeben sein, oder durch unabhängige Untersuchung ermittelt werden. Zur Erläuterung der abgeleiteten Formeln werden diese angewandt auf die Interferenzerscheinungen, welche ein tordierter Glaszylinder im polarisierten Lichte zeigt, wenn die Strahlen durch die gegenüberstehenden Grundflächen desselben so gehen, daß sie mit der Achse des Zylinders nur kleine Winkel bilden. Der Zylinder zeigt dann Farbenringe, deren Durchmesser sich nahe wie die Quadratwurzeln der natürlichen Zahlen, und

umgekehrt wie die Quadratwurzel aus dem Torsionswinkel verhalten.

Die in den beiden ersten Abschnitten abgeleiteten Resultate bilden die Grundlage für den dritten Abschnitt (§ 10 bis 20), den umfangreichsten und wichtigsten der Arbeit, in welchem die Theorie der Farben aufgestellt wird, welche bei durchsichtigen unkristallinischen Körpern im polarisierten Lichte aus der ungleichen Temperaturverteilung entstehen. Den Grund für die Doppelbrechung bilden hier die durch jene Temperaturverteilung entstehenden, nach den verschiedenen Richtungen ungleichen Dilatationen der Teilchen. Kennt man den Zusammenhang zwischen der Temperatur und den durch sie hervorgebrachten Dilatationen, so geben die Formeln der beiden ersten Abschnitte die entstehende Doppelbrechung und die dadurch bedingten Farben. Es ist daher vor allem der Zusammenhang zwischen einer Temperaturveränderung und den dadurch bedingten molekularen Verrückungen zu ermitteln. Neumann findet diesen, indem er den Poissonschen Gleichungen für das Gleichgewicht elastischer Körper Zusatzglieder hinzufügt, die den Differentialquotienten der Temperatur nach den Koordinaten, bzw. (in den Grenzbedingungen) jener Temperatur selbst proportional sind. Wie Neumann selbst angibt, sind diese Gleichungen schon vorher (1838) von Duhamel veröffentlicht; er fügt jedoch hinzu, daß er selbst schon seit Jahren in ihrem Besitz gewesen sei, und daß er auch die analogen Gleichungen für kristallinische Medien aufgestellt habe. Die Integration der in Rede stehenden Gleichungen, verbunden mit den in den beiden ersten Abschnitten abgeleiteten Formeln, führt unmittelbar zum Ziele. Die Gleichungen werden zuerst angewandt auf eine Kugel, in der die Temperatur konzentrisch um ihren Mittelpunkt verteilt ist. Es ergibt sich, daß die Kugel bei der Erwärmung Ringe zeigt, die gleichen Charakter mit denen des Bergkristalles haben (positive Farbenringe), bei der Abkühlung aber solche, die denen des Kalkspats analog sind. Ist die Erwärmung oder Abkühlung weit vorgeschritten, so gibt es einen Ring der höchsten Farbe, welcher seinen Ort nicht weiter verändert, wiewohl seine Farbe stets fällt. Im Anschluß daran wird gezeigt, daß eine hohle Kugel, gegen deren äußere oder innere Oberfläche ein verschiedener Druck wirkt, positive oder negative Farbenringe zeigt, je nach-

dem der innere oder äußere Druck größer ist. Weiter werden die allgemeinen Gleichungen auf den Fall einer dünnen, von parallelen Ebenen begrenzten Platte transformiert und die transformierten Gleichungen auf folgende spezielle Fälle angewandt:

I. Eine dünne kreisförmige Scheibe, sowie ein Kreisring, falls die Temperatur der Teile nur eine Funktion ihrer Entfernung vom Mittelpunkt der Scheibe ist.

II. Ein dünner Ring von geringer Breite, in welchem die Temperaturverteilung allein eine Funktion des Bogens des Ringes ist, während innerhalb eines jeden Querschnittes die Temperatur als konstant angenommen wird. Die Untersuchung der in diesem Falle entstehenden Verzerrungen hat außer ihrem optischen Interesse noch ein praktisches, wegen ihrer Anwendung auf die Bestimmung der Fehler, welche beim Winkelmessen aus der ungleichen Erwärmung des zum Messen dienenden Kreises entstehen. — Auch der Fall, daß der Kreis von Speichen getragen wird, findet hier seine Erledigung.

III. Zwei dünne, schmale Streifen von verschiedenen Stoffen sind derartig fest miteinander verbunden, daß sie bei einer bestimmten Temperatur gerade sind, bei Änderung der Temperatur aber sich krümmen. Es wird die Relation entwickelt, welche zwischen dieser Krümmung, den beiden Elastizitätsmoduln und den Ausdehnungskoeffizienten, sowie den Dimensionen der beiden Streifen besteht. Außer auf die bleibenden Farben, welche ein solches System im polarisierten Lichte zeigt, werden die Resultate auf die Theorie der Metallthermometer angewandt.

IV. Eine dünne rechtwinklige Platte, in welcher die Temperaturverteilung eine Funktion der Höhe der Platte ist. Dies ist sehr nahe der Fall in der schönen Reihe von Experimenten von Brewster (Phil. Trans. 1816), in welchen er eine Glasplatte von gewöhnlicher Temperatur mit einem ihrer Ränder auf eine heiße Metallplatte stellt, oder umgekehrt eine heiße Glasplatte auf eine kalte Metallplatte. Für den Fall, daß die Höhe der Platte die Breite mehrmals übertrifft, oder umgekehrt die Breite mehrmals größer ist als die Höhe, gelingt es Neumann, Näherungsformeln aufzustellen, die die entstehenden Farbenerscheinungen vollständig erklären. Nur dürfen die Formeln im ersten Falle nicht auf Stellen angewandt werden, welche in der Nähe des unteren oder oberen Randes liegen, im zweiten Falle nicht auf

Stellen, welche sich in der Nähe der Seitenwände befinden. Wie schon bemerkt, sind die von Neumann abgeleiteten Resultate nur angenäherte. Einer vollständigen Auflösung der Gleichungen, von denen das Problem der inneren Spannung in einer rechtwinkligen Platte bei ungleichförmiger Temperaturverteilung abhängt, stellten sich unüberwindliche analytische Schwierigkeiten entgegen. Diese Schwierigkeiten bestehen in der Bestimmung der Koeffizienten der Glieder von Reihen, welche nach den imaginären Wurzeln einer transzendenten Gleichung fortschreiten.

Über die Untersuchungen des dritten Abschnittes seiner Abhandlung spricht sich Neumann in der Einleitung folgendermaßen aus:

„Die Übereinstimmung der Theorie mit den Beobachtungen überall, wo ich den Calcul bis zu dem einzelnen Fall habe durchführen können, läßt über die Richtigkeit ihrer Prinzipien keinen Zweifel. Was in Hinsicht der Erklärung und Berechnung der Farben, welche durch ungleiche Temperaturverteilung hervorgebracht werden, zu wünschen übrig bleibt, ist die Vervollkommnung der analytischen Methoden und die Verifizierung der Gleichungen, von welchen die Bewegung der Wärme abhängt, namentlich in Beziehung auf schlechtleitende Körper. Dann erst wird es auch von Interesse sein, in den Gleichungen für die durch Temperaturdifferenzen hervorgebrachten Spannungen die Wärmerepulsion nicht, wie es hier geschehen ist, proportional mit der Temperatur zu nehmen, sondern die vollständigere Funktion, wodurch diese Repulsion dargestellt wird, in die Gleichungen einzuführen, wodurch übrigens ihre Form keine Veränderung erleidet."

Ähnliche Farbenerscheinungen, wie sie durch die ungleiche Temperaturverteilung entstehen, erhält man auch durch Härtung der festen durchsichtigen Körper, oder durch rasche Abkühlung. Während aber die vorher besprochenen Erscheinungen vorübergehende sind, entstehen hier bleibende Farben. Auch eine Theorie dieser bleibenden Farben hat Neumann entwickelt; doch teilt er in unserer Abhandlung nur am Schluß der Einleitung die Prinzipien mit, auf denen seine Rechnungen beruhen.

Analog dem vorübergehenden molekularen Druck, der in einem elastischen Körper durch eine vorübergehende Dilatation

hervorgerufen wird, entsteht in einem durch bleibende Dilatationen gespannten Körper ein bleibender molekularer Druck. Diese bleibenden molekularen Druckkräfte, für die eine exakte Definition aufgestellt wird, sind in die Navier schen Gleichungen des Gleichgewichtes elastischer Körper einzuführen. Dabei sind dreierlei Arten von Dilatationen zu unterscheiden: die absolute, die bleibende und die relative, letztere die Differenz der beiden ersten. Die relativen Spannungen sind es, welche sowohl die innere Spannung des Körpers hervorbringen, als die Farben, welche derselbe, wenn er durchsichtig ist, im polarisierten Lichte zeigt. Um diese Farben durch Rechnung zu bestimmen, brauchen nur in die allgemeinen Formeln, die in der Abhandlung entwickelt sind, die Ausdrücke für die relativen Dilatationen substituiert zu werden. In jedem besonderen Falle muß das System bleibender Dilatationen gegeben oder in einer besonderen Untersuchung bestimmt werden.

Neumann zieht aus seinen Betrachtungen die wichtige Folgerung, daß das System von Spannungen und Dilatationen, welches in einem Körper durch seine Härtung hervorgebracht wird, immer auch durch eine bestimmte Temperaturverteilung hervorgebracht werden kann. Darin liegt der Grund der merkwürdigen Übereinstimmung der Farben, welche ein gehärteter Körper im polarisierten Lichte zeigt, mit denjenigen Farben, welche in ihm durch Temperaturdifferenzen hervorgebracht werden können.

Am Schluß der Abhandlung endlich (S. 230—247) werden die Prinzipien der Theorie der inneren Spannungen, welche aus bleibenden Dilatationen eines festen Körpers entstehen, durch einige Formeln erläutert. Im besonderen wird der Wert für die bleibenden Dilatationen berechnet, welche bei Härtung (rascher Abkühlung) einer Glaskugel entstehen. Ferner werden die Verrückungen und inneren Spannungen in einem langen geraden Zylinder bestimmt, welche durch eine konzentrische Temperaturverteilung in ihm und durch die bleibenden Dilatationen, die aus seiner Härtung entstanden sind, hervorgebracht werden.

Darauf, daß Neumann seinen Entwicklungen die alte Naviersche Elastizitätstheorie zugrunde gelegt hat, ist schon früher hingewiesen (s. S. 23).

IV. Arbeiten über induzierte elektrische Ströme.

1. Die mathematischen Gesetze der inducierten elektrischen Ströme. Abhandl. d. Königl. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1845, S. 1—87 [1]). Vorgelesen daselbst am 27. Oktober 1845.

Die Erscheinungen der elektrischen Induktion waren 1831 von Faraday entdeckt, ihre wichtigsten Gesetze experimentell von diesem und anderen Forschern, unter denen besonders Lenz und W. Weber zu nennen sind, aufgesucht. Es kam darauf an, aus der Fülle der Erscheinungen das allgemeine Gesetz herzuleiten und mathematisch zu formulieren, das alle diese Erscheinungen umfaßte, und aus dem sich die einzelnen durch rein mathematische Deduktionen ergaben. Dies ist für lineare Leiter in den beiden Neumannschen Abhandlungen geschehen, und zwar, ohne daß dabei eine besondere Voraussetzung in bezug auf das Wesen der galvanischen Ströme gemacht ist. Neumann geht also nicht, wie bald nach ihm Weber (1846), darauf aus, aus dem Wesen der elektrischen Anziehung und Abstoßung selbst die ersten Tatsachen der Induktion zu erklären. Er will nur die Grundsätze entwickeln, nach denen die elektrodynamische und die elektromagnetische Induktion vor sich gehen. Aber trotzdem Neumann nicht bis auf die ersten Ursachen zurückgeht, ist sein allgemeines Prinzip der induzierten Ströme, wie Carl Neumann in einem Briefe an Volkmann sich ausdrückt, „ein Gesetz von ähnlicher Universalität, wie sie etwa das berühmte Prinzip der lebendigen Kraft besitzt". „Die beiden Neumannschen Ge-

---

[1]) Die Abhandlung ist von neuem abgedruckt in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 10, herausgegeben von C. Neumann, Leipzig 1889. — Der eigentlichen Arbeit ist unter der Überschrift „Vorbericht" eine ausführliche Inhaltsangabe vorangeschickt. Diese ist auch in den Berichten der Berliner Akademie für 1845, S. 322—334, sowie in Pogg. Ann. 67, 31—44, 1846, abgedruckt.

In dem schon früher (S. 27) erwähnten Briefwechsel Neumanns mit Jacobi hatte letzterer vorgeschlagen, jenen „Sommaire" bei dem Druck der eigentlichen Arbeit fortzulassen, mit dem Hinzufügen, auch Poggendorff sei derselben Ansicht. Später hat Jacobi sich überzeugt, wie wertvoll jener Vorbericht ist, auch daß derselbe erst im Zusammenhange mit der eigentlichen Abhandlung voll gewürdigt werden kann. Die Überschrift „Vorbericht" ist auf Jacobis Vorschlag hinzugefügt.

setze (das Prinzip der induzierten Ströme und das die pondero-motorische Wirkung der elektrischen Kräfte beherrschende Potentialgesetz, beide in der zweiten Abhandlung entwickelt) gehören zu den großartigsten und erhabensten Entdeckungen im ganzen Gebiet der Elektrizität" [1]).

Schon oben ist bemerkt, daß sich Neumanns Untersuchungen nur auf lineare Leiter beziehen (lineare Induktion). Dieser Fall ist der einfachste, weil hier die in dem Element induzierte Elektrizität sich auf einem gegebenen Wege fortpflanzt, während bei der Induktion in körperlichen Leitern oder in dünnen Platten die Wege, auf welchen die Fortpflanzung der erregten Elektrizität geschieht, mit bestimmt werden müssen. „Die Prinzipien der linearen Induktion gestatten aber eine Ausdehnung auf diese komplizierteren Fälle, welche der Gegenstand einer zweiten Abhandlung sein soll, in der die Theorie des Rotationsmagnetismus entwickelt werden wird" [2]).

Leider hat Neumann die Untersuchungen, von denen er hier spricht, nicht veröffentlicht; allerdings hat er diesen Gegenstand hin und wieder in seinen Vorlesungen behandelt, aber in den gedruckten Vorlesungen über elektrische Ströme findet sich nichts darüber.

Neben der Beschränkung auf lineare Leiter macht Neumann von vornherein noch eine Einschränkung, daß nämlich „die induzierende Ursache mit einer Geschwindigkeit eintrete, welche als klein in Beziehung auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektrizität angesehen werden kann. Ohne diese Voraussetzung kann man (wie in § 2 der Arbeit gezeigt wird) nicht die induzierten elektrischen Ströme als in stationärem Zustande befindlich ansehen und die Ohmschen Gesetze darauf anwenden. Ausgeschlossen von den folgenden Betrachtungen sind also z. B. die durch elektrische Entladungen induzierten Ströme" [3]).

Neumann geht von folgenden fünf allgemeinen Sätzen als Resultaten der Beobachtungen aus [4]):

---

[1]) Vgl. Volkmann, S. 33 u. 34.

[2]) Abhandl. 1, S. 1 u. 2.

[3]) Abhandl. 1, S. 1.

[4]) Bei der Zusammenfassung der Erfahrungstatsachen zu den fünf Sätzen folge ich der Darstellung Neumanns in seiner Vorlesung über elektrische Ströme (S. 267—269).

a) Induzierte Ströme entstehen jedesmal, wo die virtuelle Wirkung des induzierenden Stromes auf den Leiter eine Änderung erfährt.

b) Die induzierte elektromotorische Kraft ist unabhängig von der Substanz des Leiters.

c) Unter sonst gleichen Umständen ist die elektromotorische Kraft der Geschwindigkeit proportional, mit welcher die Elemente bewegt werden.

d) Die Komponente nach der Richtung der Bewegung von der elektrodynamischen Wirkung, welche der induzierende Strom auf den induzierten ausübt, ist immer negativ.

e) Unter sonst gleichen Umständen ist die induzierte Stromstärke der induzierenden proportional.

Aus diesen Sätzen leitet er (§ 1) für die in einem Elemente Ds eines bewegten Drahtes induzierte elektromotorische Kraft $E.Ds$ die Fundamentalformel ab:

$$E.Ds = -\varepsilon v C.Ds \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

Darin ist v die Geschwindigkeit, mit der Ds bewegt wird, C die nach der Richtung, in welcher Ds bewegt wird, zerlegte Wirkung des Induzenten auf Ds, dieses Element von der Einheit des Stromes durchströmt gedacht. ε ist unabhängig von der Beschaffenheit des induzierten Leiters und kann bei der linearen Induktion (aber nur bei dieser) als eine Konstante angesehen werden[1].

Neben der Gesamtwirkung C des Induzenten wird übrigens weiterhin (§ 4) die Wirkung der einzelnen Elemente $D\sigma$ des Induzenten auf Ds betrachtet. Ist $c.D\sigma$ die nach der Richtung der Bewegung von Ds zerlegte Wirkung, welche $D\sigma$ auf die Einheit des Stromes in Ds ausübt, so ist der Anteil, welchen das Element $D\sigma$ an der in Ds induzierten elektromotorischen Kraft nimmt:

$$-\varepsilon v c.Ds D\sigma \quad \ldots \ldots \quad 1^a)$$

Dies ist der Ausdruck für die elementare Induktion, welche zwischen dem Element des Induzenten und dem Element des bewegten Leiters stattfindet. Da in dem vorstehenden Ausdruck 1)

[1]) Betreffs dieser Konstante vgl. weiterhin die Anmerkung S. 111.

v und C Funktionen der Koordinaten des Ortes der Elemente sind, die ihrerseits Funktionen der Zeit t sind, so ist auch die elektromotorische Kraft E eine Funktion von t. Es ist zunächst zu rechtfertigen (§ 2), daß man auch in diesem Falle den Ohmschen Satz, der einen stationären, also von t unabhängigen Zustand voraussetzt, noch anwenden kann. Durch Untersuchung der Differentialgleichung, welcher die durch die Induktion erregte elektrische Spannung genügt, folgt, daß, wenn E sich nicht äußerst rasch mit der Zeit verändert, auch für veränderliche E der Ohmsche Satz ebenso angewandt werden kann, als wäre E von t unabhängig. Die elektromotorische Spannung wird dabei, abweichend von Kirchhoffs Ansicht, aufgefaßt als die augenblickliche Dichtigkeit der in dem Element vorhandenen elektrischen Materie.

Mittels des Ohmschen Satzes ergibt sich nun (§ 3) für die Stärke des in einem linearen Leiter s induzierten Stromes der Ausdruck

$$-\varepsilon\varepsilon' \mathrm{S}\, v\, C\, Ds, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

wo ε' den reziproken Wert des Widerstandes des Weges bedeutet, den der Strom zu durchlaufen hat, und S eine Integration bezeichnet, welche sich über alle bewegten Teile des Leiters erstreckt. Der Ausdruck 2), mit dem Zeitelement dt multipliziert, gibt den induzierten Differentialstrom, dessen Maß die Wirkung ist, welche der induzierte Strom während des Zeitelementes, z. B. auf eine Magnetnadel, ausübt. Die Summe der Wirkungen, welche er in einer endlichen Zeit ausübt, ist das Maß des induzierten Integralstromes. Der Wert des letzteren hängt allein von der Länge und Lage des Weges ab, welchen der Leiter durchlaufen hat, und ist unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der er durchlaufen wurde.

„Die elektromotorische Kraft des Differentialstromes ist das negative virtuelle Moment der Kraft, welche der Induzent auf den Leiter ausübt, wenn dieser von dem konstanten Strom ε durchströmt gedacht wird.

„Die elektromotorische Kraft des Integralstromes, welcher auf dem Wege von w_0 bis w_1 erregt wird, ist der Verlust an lebendiger Kraft, welchen der Induzent in dem Leiter hervorbringen

würde, wenn dieser sich von w_0 bis w_1 frei bewegte und von dem Strome ε [1]) durchströmt gedacht wird."

Das Resultat vereinfacht sich, wenn die Komponenten der Wirkung des Induzenten auf ein Element des bewegten Leiters, das von dem Strome ε durchströmt gedacht wird, partielle Differentialquotienten derselben Funktion sind. Denkt man nämlich die Flächen konstruiert, in denen jene Funktion konstant ist (die Gleichgewichtsoberflächen), und bezeichnet den konstanten Wert an jeder dieser Flächen als Druck, „so ist die elektromotorische Kraft des Integralstromes, welcher in dem Leiter, wenn er sich parallel mit sich selbst von w_0 bis w_1 bewegt hat, induziert ist, gleich der Differenz des Druckes an den beiden durch w_0 und w_1 gehenden Gleichgewichtsoberflächen. — Der Integralstrom ist also unter den angegebenen Bedingungen unabhängig von der Länge und Lage des Weges, auf welchem er induziert wird, und hängt allein von dem Orte der Endpunkte desselben ab. — Dieser Satz wird in der Folge noch erweitert".

War bisher die Vorstellung festgehalten, daß der Induzent ruht, der induzierte Leiter bewegt wird, so wird weiter (§ 4) der umgekehrte Fall betrachtet. Er erledigt sich leicht dadurch, daß die Induktion nur von der relativen Bewegung der Elemente abhängig sein kann; und so erhält man für den in diesem Falle induzierten Differentialstrom einen ganz ähnlichen Ausdruck wie 2). Drückt man in 2) die Größe C mittels des Ampèreschen Gesetzes

---

[1]) In dem schon mehrfach erwähnten Briefwechsel beanstandet Jacobi den Ausdruck „Strom ε" und schlägt vor, für ε ein Wort zu finden; denn der Strom ε scheine doch weniger eine Quantität als ein Begriff zu sein.

Darauf antwortet Neumann in einem von Königsberger mitgeteilten Briefe, dessen Original mir nicht vorgelegen hat [Königsberger, C. G. J. Jacobi, S. 361]: „Gewiß ist ε ein Begriff! und wenn meine Abhandlung einiges Verdienst hat, so ist es dies, den Begriff dieser Größe als das eigentliche physikalische Problem aller Induktionserscheinungen hingestellt zu haben. Aber er ist in tiefe Mysterien noch verhüllt, er bezieht sich auf den geheimnisvollen Zusammenhang, in welchem alle Körper, wie sie auch außer einander liegen, untereinander stehen; wird ihre Spannung gestört, so entsteht, wenn die sonstigen Bedingungen erfüllt sind, ein elektrischer Strom. Dieses Mysterium fühlen zu lassen, gab ich in § 2 die verschiedenen Definitionen der induzierten elektrischen Kraft durch lebendige Kraft, Druck usw. Ein Wort für ε weiß ich nicht."

aus und ebenso die analoge Größe für den Fall der Bewegung des Induzenten, so ergibt die Vergleichung der Resultate den wichtigen Satz:

„Wenn zwei geschlossene Leiter gegeben sind, so wird dieselbe elektromotorische Kraft induziert, welcher von beiden Leitern auch sich bewegt, und in welchem von beiden auch der induzierende Strom fließt, nur muß die Bewegung des einen Leiters die der Bewegung des anderen Leiters entgegengesetzte sein. Die in dem einen oder dem anderen Falle induzierten Ströme verhalten sich umgekehrt wie ihre Leitungswiderstände."

„Dieser Satz kann auch auf ungeschlossene Leiter ausgedehnt werden, wenn nur die Anordnung getroffen ist, daß derselbe Leiter, mag er ruhen oder bewegt werden, der Induktion dieselbe Länge darbietet."

Die im vorigen angestellten Betrachtungen gestatten (§ 5) eine Anwendung auf die durch einen Magnetpol hervorgebrachte Induktion, da man diesen nach der Ampèreschen Theorie als das eine Ende eines Solenoids ansehen kann, dessen anderes Ende im Unendlichen liegt. Die Bewegung des Leiters in Beziehung auf das Solenoid läßt sich nun in eine progressive und eine drehende zerlegen; für jede beider Bewegungen wird der induzierte Differentialstrom berechnet, und es werden daraus folgende Sätze abgeleitet:

I. „Wenn der Leiter, welcher unter dem Einfluß eines Solenoidpoles bewegt wird, eine geschlossene Kurve bildet, so verschwindet der von seiner Drehung herrührende Anteil des induzierten Stromes, und es wird dann derselbe Strom induziert, als hätte der Leiter nur eine fortschreitende Bewegung, in welcher er parallel mit sich selbst bleibt, und zwar diejenige, welche der Pol haben würde, wenn er sich zugleich mit dem Leiter und mit ihm fest verbunden bewegte."

II. „In einem geschlossenen Leiter, der sich um eine Achse dreht, in welcher der Pol eines Solenoids liegt, wird durch diesen Pol kein Strom induziert. Dasselbe gilt, wenn in der Drehungsachse mehrere Pole liegen." Daraus folgt:

III. „In einem geschlossenen Leiter, der sich um die Achse eines begrenzten Solenoids dreht, wird durch das Solenoid kein Strom induziert."

IV. „In einem ungeschlossenen Leiter, der sich unter dem Einfluß eines Solenoidpoles bewegt, rührt ein Teil des induzierten Stromes von der drehenden Bewegung des Leiters her; dieser Teil ist aber von der Gestalt des Leiters unabhängig, und allein durch die Bewegung seiner Endpunkte bestimmt."

Analoge Resultate ergeben sich (§ 6), wenn der Leiter ruht, das Solenoid aber sich bewegt. Die Induktion ist dann allein von der Bewegung der Pole des Solenoids abhängig. Ist der Leiter geschlossen, so kommt nur die progressive Bewegung des Poles in Betracht, während durch seine Drehung kein Strom induziert wird. In einem nicht geschlossenen Leiter dagegen induziert der Pol, ohne seinen Ort zu verändern, allein durch seine Drehung um sich selbst einen Strom. In dem letzten Satze liegt der Aufschluß über alle Induktionserscheinungen, welche durch die Drehung eines Magneten um seine Achse hervorgebracht werden, über diejenigen z. B., denen Weber den Namen unipolare Induktion gegeben hat.

Die Resultate werden nun (§ 7) angewandt zur Bestimmung der Induktionsströme, welche durch Magnete erregt werden, indem nach der Vorstellung der Ampèreschen Theorie ein Magnet als ein System von unendlich vielen, unendlich kleinen Solenoiden angesehen wird: „Dieses System von Solenoiden kann durch ein System von Polen ersetzt werden, die allein auf der Oberfläche des Magneten verteilt sind, das ist: die durch den Magneten in dem bewegten Leiter erregte Induktion kann als durch seine mit freiem Magnetismus belegte Oberfläche hervorgebracht angesehen werden. Diese magnetische Oberfläche ist dieselbe, welche nach dem Gaussschen Satz auf einen äußeren Pol gleiche Wirkung wie der im Innern des Magneten verteilte Magnetismus ausübt."

„Man kann statt der Bewegung des Leiters die entgegengesetzte der magnetischen Oberfläche substituieren und umgekehrt. Wenn aber die magnetische Oberfläche bewegt gedacht wird oder wirklich sich bewegt, so hängt der induzierte Strom nicht allein von der Ortsveränderung ab, welche ihre Elemente erfahren, sondern auch von ihren dabei stattfindenden Drehungen. Der Teil des Induktionsstromes, welcher von der Drehung der Elemente der magnetischen Oberfläche herrührt, ist von der Gestalt des induzierten Leiters unabhängig; er hängt allein von der Lage der

Endpunkte ab und verschwindet, wenn der Leiter eine geschlossene Kurve bildet."

Weiter werden (§ 8) die Ausdrücke für die Induktionsströme ermittelt, die durch ein plötzliches Eintreten oder Verschwinden des Magnetismus oder überhaupt durch eine Veränderung des magnetischen Zustandes eines Magneten erregt werden, indem der Akt der Magnetisierung und Entmagnetisierung als eine Bewegung der beiden magnetischen Flüssigkeiten angesehen wird, infolge deren die vereinigten sich trennen oder die getrennten sich vereinigen. Die so erhaltenen Resultate lassen sich aber (§ 9) noch auf eine andere Weise aus einem neuen allgemeinen Prinzip ableiten. Neumann gelangt zu diesem Prinzip, indem er von der Betrachtung des Stromes ausgeht, der in einem geschlossenen Leiter durch eine Ortsveränderung, sei es des Magneten oder des Leiters, induziert wird.

„Es ist leicht nachzuweisen, daß dieser Strom allein von der durch die Ortsveränderung hervorgebrachten Veränderung des Wertes des Potentials [1]) abhängt, durch welches die Wirkung eines von der Einheit des Stromes durchströmten Leiters auf einen Magneten dargestellt wird. Ich verallgemeinere dies Resultat und setze als Prinzip: daß die Veränderung des Potentials, durch welches die Wirkung eines von der Einheit des Stromes durchströmten Leiters auf einen Magneten dargestellt wird, die Ursache und das Maß des induzierten Stromes ist und es hierbei gleichgilt, wodurch diese Veränderung des Wertes des Potentials hervorgebracht wird, ob durch eine veränderte relative Lage des Magneten und des Leiters oder durch einen anderen Umstand, wie z. B. durch eine Schwächung des Magneten."

Dies Prinzip läßt sich nun (§ 10) auch auf diejenigen Ströme ausdehnen, welche in einem ruhenden Leiter von einem ruhenden

---

[1]) In einem Briefe an Jacobi (s. Königsberger, Jacobi, S. 362) sagt Neumann ausdrücklich, daß er den Ausdruck Potential in etwas allgemeinerem Sinne genommen habe, und in der Abhandlung selbst sagt er S. 51 in einer Anmerkung: „Ich drücke mich der Kürze halber auf diese Weise aus, statt zu sagen, daß die rechtwinkligen Komponenten der Wirkung die partiellen Differentialquotienten des Potentials sind."

galvanischen Strom induziert werden, der in seiner Intensität eine Änderung erleidet. Zunächst ergibt sich aus den Betrachtungen des § 4 unter Benutzung des Satzes, daß die Wirkung zweier geschlossenen Ströme aufeinander von einem Potential abhängt, für die durch Bewegung erregte Induktion der Satz:

„Die in einem geschlossenen Leiter durch einen geschlossenen galvanischen Strom induzierte elektromotorische Kraft, sei es daß der Leiter oder der Strom eine Ortsveränderung erfährt, ist gleich der Differenz der Werte, welche das Potential des Leiters, bezogen auf den ganzen galvanischen Strom, am Anfang und Ende der Bewegung besitzt.“

Der Ausdruck des induzierten Stromes ist

$$-\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j \,\mathsf{S} \sum \frac{d^2}{dn\,dv}\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}\right) Do\, D\omega,$$

wo j die Stromstärke des induzierenden Stromes ist. Die Bedeutung der übrigen Zeichen ist folgende: Man denke sich durch die Kurve des Leiters eine beliebige durch sie begrenzte Oberfläche o gelegt und eine zweite ω durch die Kurve des Induzenten und durch diese begrenzt. Do und $D\omega$ sind Elemente dieser zwei Oberflächen und r' und r'' ihre Entfernungen vor und nach der Bewegung. Das nach n und v genommene zweite Differential wird so verstanden, daß man zuerst den einen Endpunkt von r in der Normale von Do um dn verrückt, und das hierdurch erhaltene Differential zum zweiten Male differentiiert, indem man den anderen Endpunkt von r in der Normale von $D\omega$ um dv fortrücken läßt. Die Integrationen S und $\sum$ beziehen sich auf die Oberflächen o und ω.

Aus der Unabhängigkeit der induzierten elektromotorischen Kraft von der Bewegung an sich wird gefolgert, daß jede Ursache, welche eine Veränderung im Werte des in Beziehung auf einen geschlossenen Leiter stattfindenden Potentials eines geschlossenen Stromes hervorbringt, einen Strom induziert, dessen elektromotorische Kraft durch die Veränderung, welche das Potential erlitten hat, ausgedrückt ist. Ein ruhender elektrischer Strom induziert demnach, wenn seine Intensität von j' bis j'' wächst, in einem ruhenden geschlossenen Leiter einen Strom, dessen Ausdruck ist:

$$-\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\varepsilon'\,(j''-j')\,\mathrm{S}\sum\frac{d^2\frac{1}{r}}{d n\, d\nu}\,Do\,D\omega\,^{1)}.$$

Ferner ist der durch das plötzliche Auftreten eines galvanischen Stromes in einem ruhenden Leiter induzierte Strom derselbe, als hätte sich der Leiter aus großer Entfernung her dem Strom bis an die Stelle, wo er sich befindet, genähert.

War hierbei vorausgesetzt, daß sowohl der Leiter, als der Induzent geschlossen sind, so wird weiter (§ 11) die Wirkung eines geschlossenen Stromes σ auf einen ungeschlossenen bewegten Leiter s untersucht.

„Die Summe der während der Bewegung von s induzierten elektromotorischen Kräfte ist gleich dem Potential des Stromes σ in bezug auf die geschlossene Umgrenzung der Oberfläche, welche der Leiter beschrieben hat, diese umgrenzenden Kurven, nämlich die beiden des Leiters selbst in seiner Anfangs- und Endposition und die während der Bewegung von seinen beiden Endpunkten beschriebenen, durchströmt gedacht von dem Strome ε."

„Dies Theorem gibt, wenn der induzierte Leiter geschlossen ist, den Satz des vorigen Paragraphen über die Induktion eines

[1] Zu dieser Formel macht Jacobi in einem Briefe an Neumann vom 28. Januar 1846 die Bemerkung: „Der geometrische Satz hat mich sehr interessiert, der hier gleichsam galvanischen Betrachtungen entströmt, daß

$$\mathrm{S}\sum\frac{d^2\frac{1}{r}}{d n\, d\nu}\,Do\,D\omega$$

von der Besonderheit der Oberflächen o und ω, welche durch die beiden Kurven s und σ gelegt werden, unabhängig ist und bloß durch diese Kurven bestimmt wird. Wenn ich nicht irre, geben Sie für diese Bestimmung in § 11 die Formel

$$-\mathrm{S}\sum\frac{\cos(ds,\,d\sigma)}{r}\,ds\,d\sigma;$$

aber ich kann keine direkte Transformation der einen Formel in die andere sogleich finden."

Hierzu sei bemerkt, daß die Transformation sich durch zweimalige Anwendung des Stokesschen Satzes ergibt; daß ferner die Gleichheit der beiden vorstehenden Ausdrücke nichts anderes ist als ein Spezialfall des Beltramischen Satzes, der seinerseits aus dem Satze von Stokes folgt.

geschlossenen Leiters durch einen geschlossenen Strom.“ Es folgt ferner aus demselben Theorem der Satz:

„Wenn ein ungeschlossener Leiter eine geschlossene Bahn durchlaufen hat, d. h. wenn er am Ende der Bewegung in die Lage, aus welcher er ausging, zurückgekehrt ist, so ist die auf dieser Bahn durch einen geschlossenen Strom induzierte elektromotorische Kraft die Differenz der Werte des Potentials des Stromes in Beziehung auf die zwei Kurven, welche die Endpunkte des Leiters durchlaufen haben, diese Kurven von dem Strome ε durchströmt gedacht.“

„Wenn ein geschlossener Leiter in einer geschlossenen Bahn unter dem Einfluß eines geschlossenen Stromes bewegt worden ist, so ist die Summe der induzierten elektromotorischen Kräfte immer gleich Null.“

„Diese Sätze gelten auch, wenn die Induktion nicht durch einen geschlossenen Strom, sondern durch einen Magneten hervorgebracht wird.“

„Auf den Fall, auf welchen die vorstehenden Sätze sich beziehen, den Fall nämlich der Bewegung eines Leiters unter dem Einfluß eines induzierenden geschlossenen Stromes, lassen sich derjenige, wo der geschlossene Strom statt des Leiters bewegt wird, sowie die Fälle zurückführen, wo der induzierte Leiter geschlossen, der induzierende Strom aber nicht geschlossen ist, es mag der Leiter oder der Strom bewegt werden.“

Weiter wird (§ 12) gezeigt, daß das Potential eines Solenoids, bzw. eines Solenoidpoles und damit eines Magnetpoles in bezug auf einen geschlossenen Strom eine sehr einfache geometrische Deutung zuläßt durch Einführung des Begriffes der Kegelöffnung[1]).

Durch eine geschlossene Kurve s lege man einen Kegel, dessen Spitze im Punkte P liegt, und beschreibe um P eine Kugel mit dem Radius 1, so wird das Stück der Kugel, das durch den Kegel herausgeschnitten wird, die Kegelöffnung von s in bezug auf den Punkt P genannt. Das Potential eines Magnetpoles, dessen freie

[1]) An Stelle des Wortes Kegelöffnung hatte Neumann ursprünglich die Bezeichnung „Kegelecke“ gewählt. Zum Aufgeben dieser Bezeichnung wurde er von Jacobi veranlaßt. Wie aus den Briefen des letzteren hervorgeht, ist das Wort „Kegelöffnung“ von Dirichlet vorgeschlagen. Neumann hat dann diesen ihm durch Jacobi übermittelten Vorschlag akzeptiert.

magnetische Flüssigkeit gleich 1 ist, in bezug auf einen geschlossenen Strom s von der Intensität 1 ist nun gleich der Kegelöffnung von s in bezug auf den Pol. Für das Potential eines Magneten in bezug auf einen geschlossenen Strom folgt daraus der Ausdruck

$$\mathsf{S}\, \varkappa K D \omega,$$

wo K die Kegelöffnung von s in bezug auf $D\omega$ ist, $\varkappa . D\omega$ die in dem Oberflächenelement $D\omega$ befindliche freie magnetische Flüssigkeit; die Summation ist über die Oberfläche des Magneten auszudehnen. Da der in s durch die Bewegung des Magneten und durch die Änderung des magnetischen Zustandes desselben induzierte Strom von der Differenz solcher Potentiale abhängt, wie sie oben betrachtet sind, so hat man nunmehr auch für diesen induzierten Strom einen einfachen Ausdruck. — Einer längeren Erörterung bedarf die Betrachtung des Vorzeichens der Kegelöffnung K, die ursprünglich aus einem Kurvenintegral abgeleitet war, sowie die Entscheidung der Frage, wann für K das größere oder kleinere Kugelflächenstück zu nehmen ist. Aus dieser Erörterung wird der folgende Satz abgeleitet:

„Wenn sich ein Magnetpol in einer geschlossenen Bahn bewegt hat, so ist die Summe der dadurch in einem geschlossenen Leiter s induzierten elektromotorischen Kräfte gleich Null, es sei denn, daß die Bahn des Poles die Ebene von s innerhalb s geschnitten hat. So oft die Bahn diese Ebene innerhalb s von der positiven Seite her geschnitten hat, so oft ist eine elektromotorische Kraft vom Werte $-4\pi\varepsilon\varkappa$, und bei jedem Durchschnitt von der negativen Seite her eine elektromotorische Kraft $+4\pi\varepsilon\varkappa$ induziert worden."

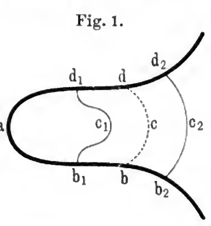
Schließlich werden die letzten Formeln auf einige einfache Beispiele angewandt. Dieselben betreffen 1. den Strom, der durch den Erdmagnetismus in einem geschlossenen Leiter induziert wird, falls dieser um seine Achse rotiert, 2. die Induktion, die herrührt von einem prismatischen oder hufeisenförmig gebogenen Magneten, falls sein freier Magnetismus als gleichförmig über die beiden Grundflächen verteilt angesehen werden kann, während die Seitenflächen davon frei sind.

2. Über ein allgemeines Prinzip der mathematischen Theorie inducierter elektrischer Ströme. Abhandlungen

der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1848, S. 1 bis 71 [1]). Vorgelesen daselbst am 9. August 1847.

Auch die zweite Abhandlung betrifft nur die lineare Induktion; sie erweitert die in der ersten abgeleiteten Resultate nach folgender Richtung hin. Waren in der ersten Abhandlung die Fälle behandelt, in welchen die gegenseitige Lage der Elemente der bewegten Stücke (mögen diese dem induzierten Leiter oder dem induzierenden Strom angehören) unverändert bleibt, diese also nur ihre Lage, nicht ihre Form ändern, werden hier beliebige Änderungen der Lage und Gestalt einzelner Teile des Leiters und des Induzenten in Betracht gezogen. Diese Änderungen sind keiner anderen Beschränkung unterworfen als der, welche für das Zustandekommen von induzierten Strömen überhaupt notwendig ist, nämlich daß die Elemente eines jeden der beiden Systeme während ihrer Bewegung untereinander in leitender Verbindung bleiben. Um die Sache anschaulicher zu machen, sei z. B. $abcd$ die Bahn des induzierten Stromes zur Zeit t. Die Induktion ist dadurch hervorgebracht, daß das Leiterstück bcd aus seiner anfänglichen Lage $b_1 c_1 d_1$ in die Lage $b_2 c_2 d_2$ fortgeführt ist, und zwar so, daß dieselben Elemente b und d mit den Unterlagen $b_1 b_2$ und $d_1 d_2$ in leitender Verbindung geblieben sind, wobei die Form des bewegten Stückes eine beliebige Veränderung erlitten haben kann. Die Stellen b, d werden von Neumann als Gleitstellen bezeichnet. Nacheinander werden folgende Fälle behandelt:

Fig. 1.



1) Die Induktion erfolgt durch einen ruhenden Strom in einem geschlossenen Leiter, dessen Elemente eine Ortsveränderung erfahren. (§ 1.)

2) In einem ruhenden Leiter werden durch die Bewegung von Stromelementen des Induzenten Ströme induziert. (§ 2.)

---

[1]) Die Abhandlung ist von neuem abgedruckt in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 36, herausgegeben von C. Neumann. Leipzig 1892. — Ein kurzer Auszug aus der Abhandlung ist in den Berichten der Berliner Akademie 1847, S. 282—283, abgedruckt.

3) Die Induktion wird durch eine gleichzeitige Verschiebung der Leiter und der Stromelemente erregt. (§ 3.)

4) Neben der gleichzeitigen Bewegung der Strom- und Leiterelemente wird die Induktion durch eine Veränderung der Stromstärke des Induzenten hervorgebracht.

Dabei wird für die elektromotorische Kraft, die in einem Element Ds eines geschlossenen Leiterumgangs erregt wird, wenn in dem Stromelement $D\sigma$ die Stromstärke j während der Zeit dt den Zuwachs $\frac{dj}{dt}dt$ erhält, der Ausdruck zugrunde gelegt:

$$-\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\, dt \frac{Ds\, D\sigma}{r} \cos\,(Ds, D\sigma)\, \frac{dj}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1^{\mathrm{b}})$$

Dieses Glied bildet also eine Ergänzung zu dem im Anfang der ersten Abhandlung aufgestellten Elementargesetz der Induktion (s. Gl. 1^{a}) S. 109), das nur für konstante Stromstärken gilt. Das vollständige Elementargesetz ist die Summe der Ausdrücke 1^{a}) und 1^{b}), nachdem 1^{a}) noch mit dt multipliziert ist.

Die Resultate der Untersuchungen aller dieser einzelnen Fälle lassen sich zu einem sehr einfachen und allgemeinen Theorem zusammenfassen, dem Neumannschen Prinzip der mathematischen Theorie der induzierten elektrischen Ströme, das natürlich auch alle Resultate der ersten Abhandlung enthält. Es lautet:

„Wird ein geschlossenes, unverzweigtes, leitendes Bogensystem A_1 durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente, aber ohne Aufhebung der leitenden Verbindung derselben, in ein anderes A_2 von neuer Form und Lage übergeführt, und geschieht diese Veränderung von A_1 in A_2 unter dem Einfluß eines elektrischen Stromsystems B_1, welches gleichzeitig durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente eine Veränderung in Lage, Form und Intensität von B_1 in B_2 erfährt, so ist die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche in dem leitenden Bogensystem durch diese Veränderungen induziert worden sind, gleich dem mit der Induktionskonstante ε multiplizierten Unterschied der Potentialwerte des Stromes B_2 in bezug auf A_2 und des Stromes B_1 in bezug auf A_1, wenn A_2 und A_1 von der Stromeinheit durchströmt gedacht werden."

Mit Benutzung des Wertes für das Potential zweier geschlossenen Ströme ergibt sich für die induzierte elektromotorische Kraft der Ausdruck:

$$-\tfrac{1}{2}\varepsilon \,\mathsf{S}\sum\left[\frac{j\cos(D\sigma, Ds)}{r}\right]_1^2 D\sigma\, Ds.$$

Darin bezeichnet $D\sigma$ ein Element des induzierenden Stromes B, j die Stromstärke in $D\sigma$, Ds ein Element des induzierten Leitungsumganges A, $(D\sigma, Ds)$ den Neigungswinkel von $D\sigma$ gegen Ds; r ihre Entfernung. Die Klammer $[\;]_1^2$ stellt die Differenz der Werte dar, welche die von ihr eingeschlossene Größe in den Endpositionen der Strom- und Leiterelemente und in den Anfangspositionen besitzt. Endlich drückt S eine Summation über alle Elemente Ds, $\sum$ eine solche über alle Elemente $D\sigma$ aus.

Für den induzierten Integralstrom folgt daraus, falls ε' der reziproke Leitungswiderstand des induzierten Leiters ist:

$$J = -\tfrac{1}{2}\varepsilon\int dt\,\varepsilon'\frac{d}{dt}\mathsf{S}\sum\frac{j\cos(Ds, D\sigma)\,Ds\,D\sigma}{r},$$

während der induzierte Differentialstrom das Element des Integrals nach t ist. Ist ε' konstant, so läßt sich die Integration nach t ausführen; für einen unverzweigten Strom ferner tritt noch dadurch eine Vereinfachung ein, daß j konstant ist.

In einem Schlußparagraphen untersucht Neumann noch, wie weit die von ihm entwickelten Resultate mit den aus Webers Grundgesetz der elektrischen Wirkung abgeleiteten Induktionsgesetzen übereinstimmen [1]). Er findet dabei, daß zwischen beiden Resultaten volle Übereinstimmung besteht, 1. wenn die Induktion allein durch eine Intensitätsänderung des Stromes σ hervorgebracht wird, 2. wenn die Induktion allein durch Ortsveränderung des Leiterelementes Ds erregt wird, während der Induzent ruht und von einem konstanten Strome durchflossen wird, 3. wenn bei Bewegung des Induzenten die Zahl der Stromelemente keine Änderung erleidet, d. h. wenn keine Gleitstellen vorhanden sind. Sind aber solche vorhanden, so findet keine Übereinstimmung statt. Der Ausdruck für die induzierte elektromotorische Kraft

[1]) Webers Grundgesetz ist im ersten, 1846 erschienenen Teil seiner elektrodynamischen Maßbestimmungen enthalten, also zwischen der ersten und zweiten Neumannschen Abhandlung veröffentlicht.

zerfällt nämlich im Falle der Bewegung des Induzenten in zwei Summanden, und der erste derselben ist bei Neumann und Weber identisch, der zweite hat bei beiden dieselbe Form, aber entgegengesetzte Vorzeichen. Dieser zweite Summand verschwindet, wenn keine Gleitstellen vorhanden sind. Richtet man es umgekehrt so ein, daß der erste Summand in dem Ausdruck für die elektromotorische Kraft verschwindet (es tritt das ein, wenn die von den Stromelementen durchlaufenen Wege geschlossene Bahnen sind), so ist nach beiden Theorien die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche während des Umlaufes der Elemente des Induzenten erregt werden, dieselbe, die Richtung des induzierten Stromes aber die entgegengesetzte. Um zu entscheiden, welches der beiden Resultate mit der Erfahrung übereinstimmt, hat Neumann ein Experiment angestellt, bei dem die Gleitstelle des Induzenten einen Kreis durchläuft, während der induzierte Leiter einen konzentrischen Kreis bildet. Die Beobachtung bestätigt die Richtigkeit der Neumannschen Formel in jeder Beziehung; nicht nur die Richtung des Stromes ist die durch diese Formel geforderte, sondern auch die Stärke des induzierten Stromes wird durch die Formel richtig ausgedrückt.

Dies Ergebnis, daß der aus dem Weberschen Gesetz hergeleitete Ausdruck für den induzierten Strom der Erfahrung widerspricht, führt Neumann aber keineswegs dazu, das Webersche Grundgesetz zu verwerfen, vielmehr glaubt er nur die Art und Weise, wie es für den vorliegenden Fall in Anwendung gebracht ist, in Zweifel ziehen zu müssen. Da der Widerspruch nur auftritt, wenn der Induzent Gleitstellen besitzt, müssen die Bewegungen der Elektrizität an einer solchen Gleitstelle nicht richtig aufgefaßt sein. Bei näherer Überlegung zeigt sich, daß eine Modifikation der Rechnung in zwei Punkten nötig ist. Erstens treten bei Gleitstellen neue Elemente in die Strombahn ein oder heraus, in denen sich in einer sehr kurzen Zeit die Stromstärke von 0 auf j oder umgekehrt verändert, und die durch diese Intensitätsänderung einen induzierenden Einfluß ausüben, die in Neumanns Formeln schon enthalten ist, aber bei Anwendung des Weberschen Gesetzes noch berücksichtigt werden muß. Während des Zeitelementes dt, in welchem ein Element der Gleitstelle in die Bahn des induzierenden Stromes eintritt, erlangt zweitens seine Elektrizität den endlichen Zuwachs γ an Ge-

schwindigkeit. Dieser Zuwachs muß angesehen werden, als wäre er der Elektrizität des Elementes stetig erteilt, so daß derselbe nach Verlauf von $\frac{1}{n}dt$ den Wert $\frac{1}{n}\gamma$ hat. Die Elektrizität dieses Elementes kann also angesehen werden, als durchliefe sie während dt den Weg $\frac{1}{2}\gamma dt$; daher ist in der Weberschen Formel

$$j = \eta\gamma$$

an Stelle von γ zu setzen $\frac{1}{2}\gamma$.

Berücksichtigt man die beiden eben erörterten Punkte, so wird eine vollständige Übereinstimmung zwischen den Induktionsformeln, die sich aus dem Weberschen Grundgesetz ergeben, und dem Neumannschen allgemeinen Induktionstheorem herbeigeführt.

In einem Anhang wird der Ausdruck für das Potential zweier geschlossenen Ströme aufeinander (ein Ausdruck, der schon gelegentlich in der ersten Abhandlung § 11 auftritt) näher erörtert.

„Bezeichnet man durch σ und s die geschlossenen Bahnen zweier elektrischer Ströme, durch $D\sigma$, Ds ihre Elemente und durch $(D\sigma, Ds)$ den Winkel, unter welchem diese Elemente gegeneinander geneigt sind, so hat, wenn j und i die Intensitäten der Ströme σ und s sind, das Potential Π des einen Stromes in bezug auf den anderen diesen Ausdruck:

$$\Pi = -\tfrac{1}{2} S \sum ij \frac{\cos(D\sigma, Ds)}{r} Ds\, D\sigma,$$

worin

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-y)^2 + (z-\zeta)^2$$

und x, y, z und ξ, η, ζ die Koordinaten von Ds und $D\sigma$ sind."

Es ist dies das wichtige Neumannsche Potentialgesetz. Seine Bedeutung ist folgende: Die Wirkung des Stromes σ auf den Strom s kann ersetzt werden durch eine Kraft, die in einem Punkt A angreift, und ein Kräftepaar.

Aus dem Potential erhält man nicht allein die Komponenten jener Kraft als die negativen Ableitungen von Π nach den Koordinaten von A, sondern auch die Komponenten des Kräftepaares. Letztere sind für irgend eine durch A gehende Achse $-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$, wenn $\partial\varphi$ den unendlich kleinen Drehungswinkel um eben jene Achse bezeichnet.

Dieser Wert des Potentials kann direkt aus folgendem Gesetz abgeleitet werden, das die Wirkung eines Elementes eines geschlossenen Stromes auf ein Element eines anderen geschlossenen Stromes bestimmt: „Die Anziehung, welche zwei Elemente verschiedener geschlossener Ströme aufeinander ausüben, ist umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung und direkt proportional dem Cosinus ihrer gegenseitigen Neigung."

Dies Gesetz, welches sich aus den Ampèreschen Formeln ergibt, vor Neumann aber in dieser Form nicht ausgesprochen ist, ist nicht so zu verstehen, als stelle es die tatsächlich stattfindende Wirkung zweier Stromelemente aufeinander dar, vielmehr ist der Sachverhalt der, daß dieses vereinfachte Gesetz für geschlossene Ströme auf dasselbe Resultat führt wie das Ampèresche Gesetz.

Dieser Übersicht über den wesentlichen Inhalt der beiden wichtigen Neumannschen Abhandlungen über induzierte Ströme ist noch folgendes hinzuzufügen. Nach einer Untersuchung von C. Neumann (vgl. die C. Neumannsche Ausgabe der zweiten F. Neumannschen Abhandlung in Nr. 36 der Ostwaldschen Klassiker) führt das F. Neumannsche Elementargesetz der Induktion [das durch die Summe der Ausdrücke 1^{a}) S. 109, und 1^{b}) S. 120, dargestellt wird] zu dem Neumannschen Prinzip (s. oben S. 120) nur, falls der Induzent von Gleitstellen frei ist. Hingegen führt jenes Elementargesetz zu einer von diesem Prinzip wesentlich verschiedenen Formel, sobald Gleitstellen in dem Induzenten vorhanden sind. Da man das Prinzip als experimentell bewiesen betrachten kann, so würde hieraus folgen, daß jenes Elementargesetz noch einer Korrektur bedarf. Man vergleiche hierüber die weiteren Untersuchungen von C. Neumann, in seinem Werk: „Die elektrischen Kräfte", 2. Teil, Leipzig 1898.

V. Mathematische Arbeiten.

a) Geometrie.

De tactionibus atque intersectionibus circulorum et in plano et in sphaera sitorum, sphaerarum atque conorum ex eodem vertice pergentium. Commentatio geometrica. Berolini MDCCCXXV[1]).

---

[1]) Betreffs der Jahreszahl, die im Original MDCCCXV lautet, vgl. die Anmerkung S. 12.

Daß sich Neumann in der ersten Hälfte der zwanziger Jahre nicht nur mit Anwendungen der Geometrie auf die Kristallographie beschäftigt, sondern daneben auch rein geometrische Studien getrieben hat, zeigt die Arbeit, die er ursprünglich als Promotionsschrift eingereicht hatte. Dieselbe ist im Jahre 1826 in der Okenschen Zeitschrift Isis (Bd. XVIII, Heft 4 und 5, S. 349—367, 466—489) abgedruckt. In dieser Arbeit, die nur wenig bekannt geworden ist, werden zunächst in höchst eigenartiger Weise die Begriffe der Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise, der Potenzlinie derselben, dann die Hauptsätze über Pol und Polare eines Kreises entwickelt, ohne daß jedoch diese Namen gebraucht werden. Den Ähnlichkeitspunkt nennt Neumann: „Punctum analogicum utrique circulo commune in eodem (aut opposito) utriusque latere situm."

Auf die Potenzlinie zweier Kreise gelangt er folgendermaßen: Man suche einen Ähnlichkeitspunkt (gleichgültig welchen) beider Kreise, bestimme die Polaren desselben in bezug auf jeden der Kreise und nehme endlich die Mittellinie zwischen beiden Polaren. Das ist die Potenzlinie. Als ihre Haupteigenschaft wird hervorgehoben, daß sie alle Kreise, welche die gegebenen berühren, unter gleichen Winkeln schneidet, nämlich unter demselben Winkel, unter dem die beiden Polaren die gegebenen Kreise schneiden. Dieser Eigenschaft wegen wird die Potenzlinie zweier Kreise C', C'' „trajectoria recta circulorum circulos C', C'' tangentium" genannt, während die erwähnten beiden Polaren als „lineae analogicae trajectoriae rectae" bezeichnet werden. Diesen bei Kreisen auftretenden Begriffen werden jedesmal die analogen Begriffe für Kugeln an die Seite gestellt. Auf diese Begriffe, bzw. die über dieselben abgeleiteten Sätze gestützt, gibt Neumann eine Konstruktion der Aufgabe des Apollonius, die im wesentlichen mit der Konstruktion von Gaultier, bzw. der mit dieser nahe verwandten von Gergonne (beide waren Neumann damals nicht bekannt) übereinstimmt; sodann eine Konstruktion der Kugeln, welche vier gegebene Kugeln berühren.

Es folgt die Aufgabe, die Kreise zu konstruieren, welche drei der Größe und Lage nach gegebene Kreise C', C'', C''' unter drei gegebenen Winkeln α_1, α_2, α_3 schneiden. Die Konstruktion beruht auf folgender Überlegung. Sucht man alle Kreise, welche zwei gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln gleichartig (eadem

ratione) schneiden, so besteht die Enveloppe derselben aus zwei Kreisen; diese beiden einhüllenden Kreise werden von allen jenen schneidenden Kreisen berührt. Zur Lösung der gestellten Aufgabe hat man nur für je zwei der gegebenen drei Kreise die in Rede stehenden Enveloppen zu suchen, die also zusammen aus sechs Kreisen bestehen, und dann die Kreise zu konstruieren, welche drei der letztgenannten sechs Kreise berühren (die drei anderen werden von selbst berührt). Für die hier benutzten einhüllenden Kreise wird eine elegante Konstruktion angegeben, die darauf hinauskommt, zwei Kreise zu suchen, die einen gegebenen Punkt zum Ähnlichkeitspunkt und eine gegebene Linie zur Potenzlinie haben. — Mit der Erörterung der analogen Aufgabe für den Raum, der Aufgabe nämlich, die Kugeln zu bestimmen, welche vier gegebene Kugeln unter gegebenen (voneinander verschiedenen) Winkeln schneiden, schließt der erste Abschnitt der Arbeit.

Der zweite Abschnitt behandelt die Bestimmung der geraden Kegel, welche drei gegebene gerade Kegel mit demselben Scheitel berühren oder unter gegebenen Winkeln schneiden. Im dritten Abschnitt werden die Aufgaben, welche im ersten in bezug auf Kreise der Ebene besprochen waren, auf die Kugelfläche übertragen. Der vierte Abschnitt endlich bespricht spezielle Fälle der allgemeinen Aufgaben, indem Punkte oder gerade Linien an Stelle der ebenen Kreise, Punkte oder größte Kugelkreise an Stelle der kleinen Kugelkreise treten.

Zur Würdigung der besprochenen Arbeit muß man erwägen, daß dieselbe im Jahre 1825 vollendet ist, also vor dem Erscheinen der ersten Arbeiten von Steiner[1]), daß ferner Neumann bei der Abfassung seiner Arbeiten die der zeitgenössischen französischen Geometer, insbesondere die von Poncelet und Gergonne, nicht gekannt hat. Er sagt in der Einleitung, nachdem er die Autoren des 18. Jahrhunderts angeführt hat, ausdrücklich, daß ihm weitere Veröffentlichungen über sein Thema nicht bekannt geworden seien. Wollte man aber auch von Neumanns Leistungen das abziehen, was er nur wieder entdeckt hat, so bliebe doch des Neuen und

[1]) Steiners Abhandlung „Einige geometrische Betrachtungen“, Crelle, Bd. I, behandelt in der Einleitung dieselben Begriffe, die Neumann an die Spitze seiner Arbeit gestellt hat. Datiert ist Steiners Abhandlung vom März 1826.

Eigenartigen genug übrig, um das oben (S. 11) erwähnte Urteil von Weierstrass gerechtfertigt erscheinen zu lassen. Zu diesem Neuen gehört insbesondere das Schneiden unter gegebenen Winkeln, das vor Neumann von keinem der Bearbeiter der Aufgabe des Apollonius ins Auge gefaßt war. Ferner tritt bei Neumann zum ersten Male der Parallelismus hervor, in dem die Geometrie der geraden Kegel mit gemeinsamer Spitze zu der der Kreise in einer Ebene steht[1]). Endlich ist hervorzuheben, daß Neumann in der Einleitung es als sein leitendes Prinzip ausspricht, daß man derartige geometrische Aufgaben, wie er sie behandelt, auch geometrisch lösen müsse, daß der Weg der analytischen Behandlung, der von allen Autoren des 18. Jahrhunderts eingeschlagen sei, ein Umweg und nicht sachgemäß sei. Neumann gibt weiter an, daß es sein Hauptbestreben gewesen sei, die verschiedenen Konstruktionen von einheitlichem Gesichtspunkte aus abzuleiten. Er erwähnt endlich, daß er seine Arbeit nur als den ersten Teil einer umfassenderen Abhandlung ansehe, in der analoge Aufgaben zu behandeln wären, bei denen Kegelschnitte an Stelle der Kreise, Flächen zweiter Ordnung an Stelle der Kugeln treten. In dem Betonen der Wichtigkeit rein geometrischer Betrachtungen, in der Behandlung einer größeren Gruppe von Aufgaben nach einheitlicher Methode hat Neumann in Deutschland keinen Vorgänger. Ich stehe nicht an, ihn auf Grund der besprochenen Arbeit als einen Vorläufer von Steiner zu bezeichnen. Wäre Neumanns Arbeit bekannter geworden, so würde sein Name sicher unter den Namen der Männer genannt, denen wir die Pflege geometrischer Studien in Deutschland verdanken.

b) Kugelfunktionen.

1. Gehören Neumanns wichtigste Leistungen dem Gebiete der Physik, insbesondere der mathematischen Behandlung physikalischer Probleme an, so hat er doch auch einen Zweig der reinen Mathematik wesentlich gefördert, nämlich die Theorie der Kugelfunktionen. Seine erste darauf bezügliche Arbeit findet sich in

---

[1]) Betreffs der Würdigung der Neumannschen Arbeit vgl. auch E. Kötter: Die Entwickelung der synthetischen Geometrie, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 5, 115—118. Leipzig 1898—1901.

Schumachers „Astronomischen Nachrichten" 15 (1838) [wieder abgedruckt in den Mathem. Annal. 14 (1879)]. Dieselbe führt den Titel: „Über eine neue Eigenschaft der Laplaceschen $Y^{(n)}$ und ihre Anwendung zur analytischen Darstellung derjenigen Phänomene, welche Funktionen der geographischen Länge und Breite sind." Darin wird die Aufgabe behandelt, in einer endlichen, nach den Laplaceschen $Y^{(n)}$ fortschreitenden Reihe die Koeffizienten so zu bestimmen, daß die Reihe für eine endliche Anzahl von Werten der unabhängigen Veränderlichen (geographische Länge und Breite) gegebene Werte annimmt. Diese Aufgabe wird von Neumann viel einfacher gelöst, als es von Gauss in seiner Theorie des Erdmagnetismus für einen speziellen Fall geschehen ist. Während Gauss, der die Entwicklung bis zu den Kugelfunktionen vierter Ordnung inkl. führt, zur Bestimmung der erforderlichen 25 Konstanten 25 Gleichungen mit 25 Unbekannten auflöst, wird hier eine allgemeine Methode entwickelt, jene Konstanten mit leichter Mühe bis zu jeder Ordnung der Kugelfunktionen zu berechnen; dabei wird allerdings vorausgesetzt, daß die Beobachtungsorte nach einem gewissen Gesetze über die Erdoberfläche verteilt sind. Unter dieser Voraussetzung existiert nämlich ein einfaches System von Faktoren, mit denen man nur nötig hat, die Gleichungen zu multiplizieren und dann zu addieren, um ohne weiteres die gesuchten Konstanten zu finden. Das angedeutete Verfahren beruht auf folgenden, von Neumann aufgestellten Sätzen über endliche Summen von Kugelfunktionen. Man bestimme $2p+1$ Größen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2p+1}$ und $2p+1$ andere Größen $a_1, a_2, \ldots, a_{2p+1}$ so, daß sie den $2p+2$ Gleichungen genügen:

$$\sum a_k = 1, \; \sum a_k \mu_k = 0, \; \sum a_k \mu_k^2 = \tfrac{1}{3}, \cdots$$

$$\sum a_k \mu_k^{2p} = \frac{1}{2p+1}, \; \sum a_k \mu_k^{2p+1} = 0,$$

worin alle Summen von $k=1$ bis $k=2p+1$ zu nehmen sind: Dann ist

$$\sum a_k P_n(\mu_k) P_m(\mu_k) = 0,$$

falls $m \lessgtr n$, während für $m = n$

$$\sum a_k P_n(\mu_k) P_n(\mu_k) = \frac{2}{2n+1}$$

ist. Durch diese Hilfssätze, die für $p = \infty$ in die bekannten Integralsätze der Kugelfunktionen übergehen, sowie durch zwei analoge, die zugeordneten Kugelfunktionen betreffende Sätze gelingt, in Verbindung mit bekannten trigonometrischen Summenformeln, die angestrebte einfache Bestimmung der gesuchten Konstanten. — Will man nun die Kugelfunktionenreihe bis $Y^{(p)}$ inkl. haben, so daß es sich um die Bestimmung von $(p+1)^2$ Konstanten handelt, so bedarf es der Kenntnis der Werte der zu entwickelnden Funktion für die Durchschnittspunkte von $2p$ äquidistanten Meridianen mit denjenigen Parallelkreisen, für welche $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2p+1}$ die Sinus der Breite darstellen. Von diesen Größen μ sind $2p$ ganz willkürlich. Die Zahl der erforderlichen Beobachtungsdaten, $2p(2p+1)$, reduziert sich auf $2p(p+1)$, falls $\mu_1, \ldots, \mu_{p+1}$ Wurzeln der Gleichung $P_{p+1}(\mu) = 0$ sind.

2. Eine zweite Arbeit über Kugelfunktionen hat Neumann im 37. Bande des Crelleschen Journals (1848) veröffentlicht: „Entwickelung der in elliptischen Koordinaten ausgedrückten reziproken Entfernung zweier Punkte in Reihen, welche nach den Laplaceschen $Y^{(n)}$ fortschreiten usw." Der durch diese Arbeit angebahnte Fortschritt betrifft drei Punkte. Der wesentlichste von diesen ist die Darstellung der Kugelfunktion zweiter Art durch einen geschlossenen logarithmischen Ausdruck, d. h. die Aufstellung der Formel[1])

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)\,dz}{x-z} = R_{n-1} - P_n \,.\, lg\left(\frac{x-1}{x+1}\right),$$

wo P_n die Kugelfunktion erster Art, R_{n-1} eine ganze Funktion vom Grade $n-1$ ist. Eine ähnliche Darstellung folgt für die sogenannte zugeordnete (oder nach Neumanns Bezeichnung „adjungierte") Kugelfunktion zweiter Art. Nebenbei wird eine Anzahl von Werten der genannten Funktionen für spezielle Werte des Arguments bestimmt.

Der zweite Punkt betrifft die Potentialaufgaben für Rotationsellipsoide (bei den im Titel erwähnten elliptischen Koordinaten handelt es sich nicht um die allgemeinen elliptischen Koordinaten, sondern um solche für Rotationsflächen). Die er-

[1]) Neumanns $Q_n(x)$ ist das Doppelte der von Heine mit $Q^n(x)$ bezeichneten Funktion.

wähnte Aufgabe war von Lamé für den Innenraum, von Heine (Dissert. 1842, Crelle Journ. 26, 1843) für den Außenraum von Rotationsellipsoiden gelöst. Heine hatte zugleich erkannt, daß die auftretenden Reihen Kugelfunktionen sind. Neumann ist der erste, der die reziproke Entfernung zweier Punkte entwickelt, d. h. die in den allgemeinen Entwicklungen auftretenden Konstanten für diesen speziellen, aber fundamentalen Fallbestimmt hat.

Dazu kommt noch eins, und das bildet das dritte erhebliche Resultat. Geht man von der transformierten Laplaceschen Gleichung $\Delta V = 0$ aus, so erkennt man, solange es sich um verlängerte Rotationsellipsoide handelt, leicht, daß an Stelle der bei der Kugel auftretenden positiven Potenzen des Abstandes vom Mittelpunkt hier Kugelfunktionen erster Art zu nehmen sind. Für abgekürzte Rotationsellipsoide ist das gleiche nicht ohne weiteres klar. Vielmehr scheint es, als ob hier Summen von Funktionen erster und zweiter Art auftreten können. Neumann deckt (durch Betrachtung der Ableitungen von V nach der Normale des Ellipsoids oder des konfokalen Hyperboloids) den Grund auf, aus dem die Entwicklung für abgekürzte Ellipsoide genau dieselbe Form hat wie für verlängerte.

Den Schluß der Arbeit bildet eine Anwendung der behandelten Aufgabe auf die Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Rotationsellipsoids unter der Einwirkung beliebiger verteilender Kräfte, falls letztere ein Potential besitzen. Diese Aufgabe war vorher von Poisson nur für konstante Kräfte gelöst worden.

3. Eine dritte die Kugelfunktionen betreffende Arbeit Neumanns: „Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen“, ist 1878 als selbständige Schrift erschienen; und zwar ist dieselbe von Herrn C. Neumann nach den Manuskripten seines Vaters veröffentlicht worden. Die Hauptbedeutung dieser Schrift scheint mir in folgendem zu liegen. Bei den Anwendungen der Kugelfunktionen auf die Potentialtheorie spielen nur diejenigen zugeordneten Kugelfunktionen, d. h. diejenigen Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d(1-x^2)\frac{dy}{dx}}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\} y = 0$$

eine Rolle, für welche der Nebenindex m kleiner als der Haupt-

index n oder diesem gleich ist. Die Notwendigkeit dieser Beschränkung ergibt sich von selbst bei der Entwicklung der durch Polarkoordinaten ausgedrückten reziproken Entfernung zweier Punkte. Anders liegt die Sache, wenn man eine Reihenentwicklung für die Lösung der Laplaceschen Gleichung $\Delta V = 0$ sucht. Hier sieht man den Grund jener Beschränkung nicht a priori ein; wendet man aber trotzdem, wie es manche Autoren, z. B. Lamé, tun, ohne weitere Begründung nur Funktionen an, bei denen $m \leqq n$ ist, so bleibt in der Ableitung eine wesentliche Lücke [1]). Diese Lücke nun wird durch Neumanns Beiträge ausgefüllt. Hier werden nämlich die Integrale der obigen Differentialgleichung auch für $m > n$ eingehend untersucht. Es ergibt sich, daß, während für den Fall $0 < m \leqq n$ eine Partikularlösung jener Gleichung existiert, die für die beiden singulären Punkte $x = +1$ und $x = -1$ verschwindet, ein Gleiches für $m > n$ nicht mehr stattfindet. Vielmehr wird hier diejenige Partikularlösung, die für $x = +1$ verschwindet, für $x = -1$ unendlich, und umgekehrt. Es folgt dies, wenn man die Lösung der Differentialgleichung in die Form bringt: $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot F$, wo F eine nach Potenzen von $x + 1$ fortschreitende Reihe ist. Man könnte wohl anführen, daß sich das erwähnte Verhalten der Integrale obiger Gleichung aus den allgemeinen Eigenschaften der hypergeometrischen Reihe entnehmen läßt. Indessen ist es wichtig, daß für den speziellen Fall jener Reihe, den die Kugelfunktionen darstellen, jene Eigenschaft auch durch spezielle, einfache Methoden abgeleitet wird, und das leisten Neumanns Beiträge. Dieselben enthalten eine Anzahl neuer Reihen und Integraldarstellungen einmal der zugeordneten Kugelfunktionen selbst, sodann ihrer Erweiterungen für $m > n$. Daran schließt sich eine äußerst ausführliche Zusammenstellung von Rekursionsformeln, die zwischen Kugelfunktionen mit aufeinander folgenden Indices bestehen, und die teils bekannt, zum großen Teil aber neu sind, und weiter eine Tabelle besonders wichtiger Spezialwerte jener Funktionen. Endlich wird im zweiten Teile der Beiträge die Aufgabe behandelt, das Produkt zweier Kugelfunktionen in

[1]) Auch bei Heine tritt dieser Punkt nicht deutlich und klar genug hervor.

eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe zu entwickeln; auch dabei ergeben sich bemerkenswerte Resultate. Mit der Lösung der zuletzt genannten Aufgabe haben sich auch andere Autoren beschäftigt, so 1875 Bauer, 1877 Ferrers, 1878 Adams. Von allen diesen Bearbeitungen des Problems ist die Neumannsche nicht nur die erste (denn wenn sie auch erst 1878 veröffentlicht ist, so ist sie doch viel früher verfaßt), sondern auch die bei weitem vollständigste.

VI. Wissenschaftliche Untersuchungen Neumanns, die nicht von ihm selbst veröffentlicht sind.

Schon oben ist darauf hingewiesen, daß Neumann durchaus nicht alle seine Untersuchungen durch den Druck veröffentlicht hat, und daß seine gedruckt vorliegenden Arbeiten kein vollständiges Bild von seiner wissenschaftlichen Bedeutung geben. Daß unter dem nicht Gedruckten sehr Wertvolles und Wichtiges war, geht aus Veröffentlichungen von Neumanns Schülern wie aus den gedruckt vorliegenden Vorlesungen hervor. Weitere Quellen, das Fehlende zu ergänzen, stehen nicht zu Gebote; was man aus den vorhandenen Quellen entnehmen kann, betrifft meist nur gewisse Einzelergebnisse, zu denen Neumann gelangt war, und auch von diesen erhält man kein vollständiges Bild, weil Neumann, wie schon früher erwähnt ist, auch wenn er die Ergebnisse seiner Untersuchungen vortrug, nie dabei sagte, daß dieselben von ihm herrührten.

Was sich als von Neumann herrührend ermitteln läßt, möge hier kurz zusammengestellt werden.

Aus der Mechanik erwähnen wir die Konstruktion einer Drahtwage und die Vervollkommnung der Bordaschen Wägungsmethode (s. Vorlesungen über theoretische Physik, § 34); ferner Neumanns Methode zur Bestimmung des Trägheitsmoments eines Körpers, sowie des Drehungsmoments einer bifilaren Aufhängung. Diese Methode besteht darin, daß man zwei Gewichte, für die man die Lage der Schwerpunkte kennt, nach und nach in verschiedenen Entfernungen von der Schwingungsachse anbringt und die gesuchten Größen aus den beobachteten Schwingungsdauern berechnet. (Vorlesungen über theoretische Physik, § 21; vgl. auch Helmholtz und Piotrowski: „Über Reibung

tropfbarer Flüssigkeiten", Sitzungsberichte der Wien. Akad. XL' S. 607 ff., Helmholtz' wissenschaftliche Abhandl. I, S. 182 ff.)

Neumann hat auch wohl zuerst eine strenge Begründung der Poiseuilleschen Formel für den Ausfluß einer Flüssigkeit durch eine kapillare Röhre gegeben (mitgeteilt von H. Jacobson in dem Bericht über die Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Königsberg 1860).

In der Kapillaritätstheorie hat Neumann die von Gauss nur angedeutete Erweiterung der Theorie auf den Fall mehrerer Flüssigkeiten durchgeführt und dabei den nach ihm benannten Satz gefunden, der die Abhängigkeit der Randwinkel dreier aneinander stoßender Flüssigkeiten von den Kapillaritätskonstanten der letzteren auf eine einfache Weise darstellt. Dieser Satz ist zuerst von P. Du Bois-Reymond in seiner Dissertation, Berlin 1859, mitgeteilt und ausdrücklich als Neumannscher Satz bezeichnet. Ferner hat Neumann die allgemeinen Sätze der Kapillarität auf eine große Zahl von speziellen Aufgaben angewandt, von denen hervorzuheben ist die Bestimmung zylindrischer Flüssigkeitstropfen, sowie die der Gleichgewichtsfigur einer Flüssigkeit, die in einer anderen von gleichem oder verschiedenem spezifischen Gewicht sich befindet. Auch neue Methoden zur Bestimmung der Kapillaritätskonstanten sind in dieser Vorlesung mitgeteilt. Endlich hat Neumann einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen der Laplaceschen und der Gaussschen Kapillaritätstheorie entdeckt (s. Vorlesungen über Kapillarität, Kap. 8).

Von den die Elastizitätstheorie betreffenden Arbeiten sind erst durch die gedruckten Vorlesungen bekannt geworden: 1. Neumanns neueste Untersuchungen über die Elastizität kristallinischer Stoffe (Abschnitt 12), die die Resultate seiner älteren Arbeiten (vgl. S. 95) erheblich erweitern; 2. die Untersuchung der Schwingungen von zwei miteinander verbundenen Saiten; 3. seine Theorie des Stoßes zylindrischer elastischer Stäbe (Abschnitt 22); 4. seine Entwicklung der Formeln für die Biegung und die Schwingung dünner Stäbe. Auch Neumanns Dispersionstheorie, deren Grundzüge er in der großen Abhandlung von 1841 dargestellt hatte, ist in den in Rede stehenden Vorlesungen ausführlicher dargelegt. Neumanns Berechnungen der Biegung und Torsion kristallinischer Stäbchen sind in den Veröffentlichungen von W. Voigt mitgeteilt.

Aus der Optik enthalten die Vorträge im Seminar Erweiterungen der Theorie der Doppelbrechung sowie eine Theorie der Metallreflexion (vgl. weiterhin den Abschnitt über das physikalische Seminar).

Viele Resultate eigener Arbeiten hat Neumann in den Vorlesungen über elektrische Ströme mitgeteilt. Von diesen Resultaten ist zuerst durch H. Wild, einen Schüler Neumanns, die Neumannsche Methode zur Bestimmung der Polarisation und des Übergangswiderstandes veröffentlicht worden [1]) (vgl. S. 30). Bei allen früheren messenden Beobachtungen war es nicht möglich, die erwähnten beiden zusammenhängenden Größen voneinander zu trennen. Durch eine geschickte Kombination der Messungen mittels des Differentialgalvanometers und der Wheatstoneschen Brücke gelang es Neumann, die Messungen in zwei Operationen zu spalten, aus denen sich mittels der Kirchhoffschen Sätze zwei unabhängige Gleichungen zur gesonderten Bestimmung der gesuchten Größen ergeben. Durch seine Messungen wurde die Frage nach der Existenz eines besonderen Übergangswiderstandes definitiv in bejahendem Sinne entschieden. Aus dieser Methode ergab sich zugleich ein neues Verfahren, die elektromotorische Kraft einer inkonstanten Kette dadurch zu bestimmen, daß man die Kette in die Brücke des Wheatstoneschen Apparats einschaltete.

Wild bespricht in seiner Veröffentlichung noch die von Neumann bei seinen Versuchen angewandten Instrumente, seine besondere Einrichtung des Differentialgalvanometers und vor allem seine verbesserte Konstruktion der Tangentenbussole, die darin besteht, daß die Magnetnadel nicht in der vom Strome umkreisten Fläche fest angebracht wird, sondern in der Achse der letzteren verschiebbar ist. Zum Schluß erwähnt Wild endlich die Neumannsche Methode, gleichzeitig die Stromintensität und die erdmagnetische Kraft nach absolutem Maße zu bestimmen, indem man den Strom neben der Tangentenbussole noch durch eine Webersche Bifilarrolle leitet und gleichzeitig die Ablenkungen beider abliest. Durch diese gleichzeitige Ablesung beseitigt man die störenden Einflüsse, die bei der Gaussschen Methode die Variationen des Erdmagnetismus ausüben.

---

[1]) Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich 2, 213—243, 1857.

Aus den gedruckten Vorlesungen über elektrische Ströme, in denen natürlich die von Wild besprochenen Methoden in Neumanns eigener Darstellung wiedergegeben sind, fügen wir als Ergebnisse Neumannscher Forschungen noch hinzu: Die Ableitung des Ohmschen Gesetzes aus theoretischen Betrachtungen (§ 17), Neumanns Methode zur Berichtigung des Differentialgalvanometers (§ 22), Beschreibung und Theorie des von Neumann ersonnenen Rheometers zur Messung starker Ströme (§ 40), die Herstellung eines Raumes von konstanter elektrodynamischer Kraft und Anwendung auf die Tangentenbussole (Kap. X, § 65—80), die Untersuchung der Strömung der Elektrizität im Raume und in einer Ebene (Kap. VI und VII).

Aus den Seminarübungen ist noch die Behandlung des Weberschen Erdinduktors erwähnenswert, mit dem er in einfachster Weise die magnetische Inklination bestimmt hat.

Die Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus behandeln in modifizierter Darstellung ebenfalls die Aufgabe, durch Kreisströme ein konstantes magnetisches Feld herzustellen.

Ferner wird in einem Schlußkapitel die Neumannsche charakteristische Funktion eingeführt, ein Analogon der Greenschen Funktion.

Endlich rührt auch die bekannte Methode der Thermometerkalibrierung von Neumann und Bessel her[1]).

Die vorstehende Aufzählung von Resultaten Neumannscher Forschung macht durchaus keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Es ist nur das aufgezählt, was bestimmt Neumann zuzuschreiben ist. Vieles, was von ihm herrührt, kann heute nicht mehr mit Sicherheit als sein Eigentum bezeichnet werden, das gilt insbesondere von zahlreichen Beispielen und Anwendungen der allgemeinen Theorien, die er in seinen Vorlesungen und Seminarübungen durchführte[2]).

Daß in solchen Einzelheiten Neumanns Priorität nicht gewahrt wurde, weil er sich zum Druck seiner Untersuchungen nicht entschließen konnte, ist zwar bedauerlich, aber nicht so sehr wie der Verlust seiner Studien über mechanische Wärmetheorie.

---

[1]) Vgl. Volkmann, S. 24.
[2]) Vgl. Voigt, S. 4.

Über diese sagt C. Neumann im Vorwort zu Band II der gesammelten Werke:

„In der Tat ist nämlich jene Theorie, welche man heutzutage die „mechanische Wärmetheorie“ oder kürzer die „Thermodynamik“ zu nennen pflegt, ihrem eigentlichen Kern nach und in ihren Hauptumrissen als eine Schöpfung Neumanns zu bezeichnen. Hat doch Neumann selber zu der Zeit, als der Druck seiner Königsberger Vorlesungen (im Verlage von Teubner in Leipzig) begonnen wurde, also ungefähr schon im Jahre 1881, darauf aufmerksam gemacht, daß jene Theorie — und zwar schon vor dem Erscheinen der betreffenden Claussschen Abhandlungen — von ihm selber entwickelt worden sei in seinen Vorlesungen an der Königsberger Universität. Auch hat Neumann, indem er damals in solcher Weise sich äußerte, hinzugefügt, daß er auf seine Priorität in dieser Beziehung einiges Gewicht lege, und daß es ihm daher, zur äußerlichen Dokumentierung dieser Priorität, lieb sein würde, wenn speziell der Herausgabe seiner Königsberger Vorlesung über die mechanische Wärmetheorie ein Vorlesungsheft aus jener Zeit, in der er diese Theorie noch vor dem Erscheinen der betreffenden Claussschen Abhandlungen entwickelt habe, zugrunde gelegt werden könnte. Leider hat sich ein solches Vorlesungsheft bis jetzt nicht gefunden.“

Eine andere Mitteilung C. Neumanns über diese Priorität Neumanns findet sich bei Volkmann, S. 35—37; ihr entnehmen wir noch folgendes:

„Was Ihre Anfrage über das Prinzip der Energie betrifft, so brauche ich wohl kaum zu erwähnen, daß das Wort „Energie“ erst nach 1850 in die Wissenschaft hineingetreten ist. Soviel ich weiß, hat mein Vater auch bis in die letzte Zeit in seinen Vorlesungen stets an seiner Ausdrucksweise „Arbeitsvorrat“ festgehalten.

„Dieser Begriff des Arbeitsvorrates war in seinen Vorlesungen über die mechanische Wärmetheorie der eigentliche Angelpunkt seiner ganzen Untersuchung. Und da mein Vater eine solche Vorlesung (nach seiner Angabe) schon vor 1850 gehalten hat, so unterliegt es für mich keinem Zweifel, daß sein Name in der Geschichte des Prinzips des Arbeitsvorrates oder der Energie eine ganz hervorragende Stellung einnimmt. Dabei sei bemerkt, daß mein Vater dieses Prinzip in seinen Vorlesungen über die mecha-

nische Wärmetheorie nicht nur auf die Wärme allein, sondern gleichzeitig auf Wärme und Elektrizität angewandt hat. Ob solches allerdings schon in jener Vorlesung vor 1850 geschehen ist, weiß ich nicht.

„Noch möchte ich hervorheben, daß mein Vater in persönlichen Unterredungen jenes Prinzip sehr hoch stellte, andererseits aber auch vor seiner zu hastigen Anwendung warnte. Diese Warnung bezog sich darauf, daß man jenes Prinzip nur dann brauchen könne, wenn man sicher sei, alle Aktionen zu erfassen, und daß man in Fehler verfallen müßte, wenn man eine dieser Aktionen (aus Unkenntnis) außer Rechnung ließe."

Schließlich möge nochmals auf den schon früher (S. 30) erwähnten Verlust hingewiesen werden, den die Wissenschaft durch Nichtveröffentlichung vieler Beobachtungen Neumanns erfahren hat.

Dritter Teil.

Vorlesungen, Seminar, Laboratorium.

I. Die gedruckten Vorlesungen.

Schon im biographischen Teile dieser Schrift ist hervorgehoben, von wie wesentlicher Bedeutung zur Beurteilung von Neumanns Lebenswerk seine Vorlesungen sind. Sie sind nicht nur von historischem Interesse, insofern sie die ersten und lange Zeit die einzigen Vorlesungen in Deutschland waren, die das ganze Gebiet der theoretischen Physik behandelten, ihr Wert beruht auch nicht allein auf den zahlreichen Mitteilungen, die Neumann darin über seine eigenen Arbeiten macht, ihr Hauptwert liegt in dem meisterhaft angelegten Plane, der zweckmäßigen Auswahl der behandelten Gegenstände, die sich besonders in der Erläuterung der allgemeinen Theorie durch passende Beispiele dokumentiert, und in der Klarheit und Eleganz der Darstellung. Die Erkenntnis dieses Wertes ließ schon in den fünfziger und

sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts unter seinen Schülern den Plan entstehen, die Vorlesungen durch den Druck auch weiteren Kreisen zugänglich zu machen, um dadurch die Anregung, die sie selbst in so reichem Maße in Königsberg empfangen hatten, auch anderen zu teil werden zu lassen. Leider ist dieser Plan erst in den achtziger Jahren zur Ausführung gelangt, zu einer Zeit, wo die damaligen Schüler schon längst selbst akademische Lehrer waren. „Wenn sie", sagt O. E. Meyer im Vorwort zu den Vorlesungen über Elastizität, „jetzt noch ihren alten Wunsch zur Ausführung bringen, so muß nicht bloß die Dankbarkeit und die Liebe, welche sie gegen ihren Lehrer hegen und bewahren, sie zu der Arbeit angetrieben haben, sondern mehr noch die Überzeugung, daß diese Vorlesungen, durch welche einstmals die mathematische Physik in Deutschland ins Leben gerufen wurde, auch noch heutigentages eine vortreffliche Schule für alle diejenigen bilden werden, welche in den Geist und Inhalt der physikalischen Theorien eindringen wollen."

Diese vor 21 Jahren ausgesprochene Ansicht dürfte auch heute noch aufrecht zu erhalten sein. Ist die Wissenschaft inzwischen auch in vielem weit über den Neumannschen Standpunkt hinaus fortgeschritten, der pädagogische Wert der Vorlesungen muß auch noch für die Gegenwart anerkannt werden; ja manche der Vorlesungen sind noch heutzutage unter die besten Lehrbücher der betreffenden Disziplin zu rechnen.

Das Gesagte wird es gerechtfertigt erscheinen lassen, auf den Inhalt der gedruckt vorliegenden Vorlesungen kurz einzugehen. Wir stellen dabei jene Vorlesungen in der Reihenfolge ihres Erscheinens zusammen.

1. Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induktion, herausgegeben von C. Neumann. Leipzig 1881, 116 S.

Der Herausgeber reproduziert hier die von F. Neumann im Sommersemester 1857 gehaltenen Vorlesungen auf Grund der Vorlesungshefte von Lothar Meyer und O. E. Meyer. Es werden darin die wesentlichsten Probleme des Magnetismus in klarer und eleganter mathematischer Ausführung erörtert. Den Inhalt der Vorlesungen können wir nicht besser skizzieren als durch den Abdruck der Übersicht, die das Vorwort des Herausgebers enthält.

„Diese Vorlesungen beginnen mit einfachen Expositionen über das magnetische Potential, die magnetischen Momente, die magnetische Achse usw., besprechen dabei gelegentlich die berühmte Poisson-Gausssche Methode zur Bestimmung der horizontalen Komponente des Erdmagnetismus und gehen sodann über zur Theorie der magnetischen Induktion, wobei der Reihe nach zuerst der Fall behandelt wird, daß die induzierenden oder magnetisierenden Kräfte von der Zeit unabhängig sind, sodann der allgemeinere Fall, daß dieselben gegebene Funktionen der Zeit sind.

„Hierauf werden diese theoretischen Betrachtungen auf mehrere spezielle Fälle in Anwendung gebracht, namentlich auf den Fall, daß der induzierte (aus weichem Eisen bestehende) Körper eine Kugel oder eine Hohlkugel oder ein Ellipsoid (namentlich ein Rotationsellipsoid) ist; während gleichzeitig als induzierende oder magnetisierende Ursache entweder der Erdmagnetismus, oder ein gegebener Stahlmagnet, oder endlich ein System elektrischer Ströme in Betracht kommt. Auch schließen sich an diese Untersuchungen wichtige Bemerkungen über experimentelle Methoden. So z. B. werden mehrere Methoden entwickelt zur Messung der magnetischen Induktionskonstante. Ferner wird eine Methode angegeben, um die Inklination des Erdmagnetismus zu bestimmen durch die Beobachtung der horizontalen Ablenkung einer Kompaßnadel usw.

„Daneben wird beiläufig gezeigt, wie man einen Multiplikator durch geeignete Anordnung seiner elektrischen Stromwindungen in eine wirksame Tangentenbussole, d. i. in ein Instrument verwandeln kann, bei welchem die trigonometrische Tangente des Ablenkungswinkels von der vorhandenen Stromstärke wirklich nur durch einen konstanten Faktor sich unterscheidet. Denkt man sich nämlich ein System elektrischer Kreisströme, die alle auf ein und derselben Kugelfläche liegen und mit irgend welchen Parallelkreisen dieser Fläche zusammenfallen, und bezeichnet man die von allen diesen Kreisströmen auf einen magnetischen Massenpunkt ausgeübte Kraft mit R, so läßt sich — wie diese Vorlesungen zeigen — die Anordnung jener Parallelkreise auf der Kugelfläche stets in solcher Weise einrichten, daß die Kraft R von konstanter Richtung und Stärke wird für alle Punkte innerhalb der gegebenen Kugelfläche.

„Schließlich wird das allgemeine Problem der magnetischen Induktion auf die Ermittelung einer gewissen „charakteristischen Funktion“ reduziert, welche nur noch von der Oberflächengestalt des induzierten Körpers abhängt, und welche demgemäß für die Theorie der magnetischen Induktion von derselben fundamentalen Bedeutung sein dürfte, wie die bekannte Greensche Funktion für die Probleme der elektrischen Induktion.“

2. Einleitung in die theoretische Physik, herausgegeben von C. Pape. Leipzig 1883, 291 S.

Die Einleitung in die theoretische Physik, bei deren Herausgabe die von Pape gehörte Vorlesung vom Wintersemester 1858—1859 zugrunde gelegt ist, entwickelt die mechanischen Grundlagen dieser Disziplin. Dabei handelt es sich nicht um eine systematische Darstellung der analytischen Mechanik. Vielmehr knüpft Neumann in eigenartiger Weise an die Erscheinungen der Schwere an und erörtert an den Stellen, an denen das Bedürfnis gerade hervortritt, die Grundbegriffe und wichtigsten Sätze der Mechanik. Sehr ausführlich wird das einfache und das zusammengesetzte Pendel behandelt; neben der Entwicklung der Theorie finden dabei die Methoden der Pendelbeobachtung, insbesondere die Besselschen Arbeiten, eingehende Berücksichtigung. Im Anschluß an das Pendel wird die Theorie der bifilaren Aufhängung, die Berechnung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel, die Theorie der Wage, ferner die allgemeine Gravitation und die Bestimmung der Dichtigkeit der Erde besprochen.

An den die Erscheinungen der Schwere behandelnden Teil, der mehr als ein Drittel des ganzen Bandes einnimmt, schließt sich die Hydrostatik und Aerostatik; hier kommen hauptsächlich die Gestalt rotierender Flüssigkeiten, die Bestimmung des spezifischen Gewichtes, die barometrischen Höhenmessungen, die Gestalt der Atmosphäre zur Sprache.

Daran schließt sich zunächst ein Kapitel über den Satz von der lebendigen Kraft und die Fälle, in denen er nicht ohne weiteres gilt, während die beiden letzten Kapitel die Hydrodynamik und Aerodynamik enthalten. Ohne auf die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen einzugehen, leitet Neumann aus dem Satze der lebendigen Kraft die Erscheinungen beim Ausfluß der

Flüssigkeiten und Gase, die Reaktion der Flüssigkeits- und Gasstrahlen, die Bewegung in engen Röhren unter Einfluß der Reibung ab. Dabei wird überall auf Beobachtungen, namentlich die Daniel Bernoullis, Rücksicht genommen.

Einige in dieser Vorlesung enthaltene Mitteilungen Neumanns über eigene Untersuchungen sind schon oben erwähnt.

3. Vorlesungen über elektrische Ströme, herausgegeben von K. Von der Mühll. Leipzig 1884, 308 S.

Es wird die Theorie der elektrischen Ströme in der Form dargestellt, in der sie Neumann in den Vorlesungen vom Winter 1864—1865 gegeben. Auch hier geben wir die Übersicht über den Inhalt mit den Worten des Herausgebers.

„In diesen Vorlesungen wird die Theorie der elektrodynamischen Erscheinungen mit Besprechung der Umstände eingeleitet, unter denen elektrische Ströme entstehen; der Begriff der Spannung wird eingeführt, und die Ohmschen Gesetze entwickelt. Es folgt eine Übersicht über die wichtigsten Methoden zur Messung der Stromstärke; dabei müssen die Haupteigenschaften eines Magnetes betrachtet und die magnetischen Fernwirkungen berechnet werden. Nachdem sodann auch der Widerstand erörtert worden, können die von Ohm angestellten theoretischen Betrachtungen dargelegt werden; aus denselben ergeben sich die Gesetze der Stromteilung. Den Abschluß dieser einleitenden Betrachtungen bildet das zweite Kapitel, in welchem die hauptsächlichsten Methoden zur Bestimmung der Konstanten besprochen werden, namentlich der elektromotorischen Kraft und des Widerstandes, dann auch der Polarisation und des Übergangswiderstandes.

„Das dritte Kapitel beschäftigt sich eingehend mit den Ampèreschen Gesetzen. Zunächst wird die Wirkung abgeleitet, welche zwei Stromelemente aufeinander ausüben, und dann die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement berechnet; ist aber die Wirkung auf einen gleichfalls geschlossenen Strom zu bestimmen, so existiert ein Potential. Dies wird für die Theorie des Rheometers gleich verwertet. Ferner können die Wirkungen geschlossener Ströme mittels Determinanten einfach dargestellt werden. Endlich führt die Betrachtung von unendlich kleinen geschlossenen Strömen und von Solenoiden zu der Ampèreschen Theorie des Magnetismus.

„In den beiden folgenden Abschnitten werden auf Grund dieser Theorie zwei sehr wichtige Aufgaben behandelt. Einmal wird gezeigt, wie jeder Magnet in betreff seiner Wirkungen nach außen durch ein System von geschlossenen Strömen zu ersetzen ist. Dann wird ein System von Kreisströmen so aufgestellt, daß die elektrodynamische Wirkung im Innern einer Kugel konstant ist, und die Lösung dieser Aufgabe liefert eine ganz allgemeine Theorie der Tangentenbussole.

„Das sechste und siebente Kapitel geben die allgemeinen Prinzipien für die stationäre Strömung der Elektrizität im Raum und in der Ebene.

„Im letzten Abschnitte werden die induzierten Ströme behandelt. Nach einer kurzen Übersicht über die Mittel, in einem linearen geschlossenen Leiter einen Strom zu induzieren, wird aus einigen einfachen Sätzen, welche die Resultate der Beobachtung zusammenfassen, das allgemeine Prinzip der Induktion abgeleitet; dieses Prinzip bestimmt den Integralstrom durch die Änderung, welche das Potential des induzierenden Stromes auf den Leiter erfährt. Den Schluß bildet die Betrachtung des von Wilhelm Weber aufgestellten allgemeinen elektrischen Grundgesetzes; aus demselben folgt sehr einfach das Ampèresche Gesetz für die Wirkung zwischen zwei Stromelementen, aber auch das Prinzip der Induktion, wenn die wirklich in Bewegung versetzten elektrischen Massen der Rechnung zugrunde gelegt werden."

4. Vorlesungen über theoretische Optik, herausgegeben von E. Dorn. Leipzig 1885, 310 S.

Es sind hier die Neumannschen Vorlesungen aus dem Sommer 1866 und dem darauf folgenden Wintersemester bearbeitet und Ergänzungen aus den Seminarübungen vom Winter 1866—1867 und vom Sommer 1867 eingefügt.

Die Vorlesungen beginnen mit einer kurzen historischen Einleitung, an die sich eine Besprechung der Hypothesen der Undulationstheorie und der zu benutzenden Prinzipien der Mechanik schließt (Kap. I). Es folgt (Kap. II) die analytische Behandlung der Lichtstrahlen, insbesondere ihre Zusammensetzung und Zerlegung, weiter (Kap. III) eine Ableitung der hauptsächlichsten Interferenzerscheinungen (Farben dünner Blättchen, Newtonsche Ringe, Newtons Farbentafel, Th. Youngs Interferenzversuch, Fresnels Spiegelversuch).

In sehr ausführlicher Darstellung werden in den Kapiteln IV bis VII die Diffraktionserscheinungen erörtert, und zwar werden zunächst die allgemeinen Formeln abgeleitet, und dann auf die Fresnelschen und Fraunhoferschen Beugungserscheinungen, auf die Erscheinungen an Beugungsgittern, sowie auf die Höfe um Sonne und Mond angewandt. Im Anschluß daran wird gezeigt, daß man die Gesetze der Reflexion und Brechung aus dem Huygensschen Prinzip, verbunden mit dem Prinzip der Interferenz, ableiten kann. In Kap. VIII wird sodann eine Übersicht über die Erscheinungen der Polarisation und die verschiedenen Polarisationsapparate gegeben, nebst dem Nachweis der Transversalität der Lichtschwingungen, und in Kap. IX werden die Formeln für Reflexion und Brechung an isotropen Medien entwickelt, nebst ihrer Anwendung auf die totale Reflexion.

Weiter folgt (Kap. X) die Doppelbrechung in einachsigen Kristallen nebst dem Problem der Reflexion für dieselben. Dabei wird die Gestalt der Wellenfläche als bekannt vorausgesetzt, während bei der Untersuchung der Doppelbrechung in zweiachsigen Medien (Kap. XI) die Gestalt der Fresnelschen Wellenfläche aus den Gesetzen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenebene abgeleitet wird. Hinsichtlich der Herleitung dieser Gesetze wird auf die Theorie der Elastizität verwiesen. Nachdem auf dieser Grundlage die Gesetze der Doppelbrechung, einschließlich der konischen Refraktion, ausführlich entwickelt sind, werden in Kap. XII die Farbenkurven, welche dünne Kristallblättchen im polarisierten Lichte zeigen, abgeleitet; endlich wird im Kap. XIII die Doppelbrechung im Quarz nebst den Farbenerscheinungen in Quarzplatten besprochen.

Der Herausgeber, der sich aller einschneidenden Änderungen des Neumannschen Textes enthalten hat, hat am Schluß Ergänzungen hinzugefügt, um einige Punkte der Neumannschen Darstellungen, die durch die neuere Literatur überholt waren (so z. B. hinsichtlich der Newtonschen Farbentafel, ferner der Grundlage der Diffraktionstheorie usw.) zu modifizieren.

5. Vorlesungen über die Theorie der Elastizität fester Körper und des Lichtäthers, herausgegeben von Oskar Emil Meyer. Leipzig 1885, 374 S.

Für die allgemeinen Gleichungen der Elastizitätstheorie werden zunächst vier verschiedene Ableitungen gegeben. Voran-

gestellt wird die auf allgemeiner mechanischer Grundlage beruhende Entwicklung, die über die Anordnung der Teilchen nichts voraussetzt, und die an die Bedingungen des Gleichgewichtes eines Elementarparallelepipedons unter Einwirkung der elastischen Druckkräfte anknüpft. An die Aufstellung der allgemeinen Gleichungen, denen diese Druckkräfte genügen, schließt sich eine Erörterung über die symmetrische Verteilung der in Rede stehenden Kräfte, sowie die Ermittelung ihres Zusammenhanges mit den Verrückungen.

Neben dieser strengen Begründung der Theorie werden auch die älteren, auf der Molekularhypothese beruhenden Entwicklungen von Navier und Poisson gegeben, die die elastischen Erscheinungen isotroper Medien nur von einer statt von zwei Konstanten abhängig machen. Endlich werden die allgemeinen Gleichungen nach einer vierten, von C. Neumann herrührenden Methode[1]) aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten hergeleitet.

Weiter werden auch die Verschiebungen in Betracht gezogen, die in einem elastischen Medium durch Temperaturveränderungen entstehen, und es wird gezeigt, welche Zusatzglieder dadurch einerseits in den elastischen Gleichungen, andererseits in der Fourierschen Gleichung für die Wärmeleitung bedingt werden. Nachdem noch die Eindeutigkeit der Lösungen der Grundgleichungen erörtert ist, werden diese Gleichungen zur Ermittelung der Formenänderung unkristallinischer elastischer Körper angewandt, und zwar beziehen sich diese Anwendungen auf Dehnung und Zusammendrückung prismatischer Körper, Dilatation von Hohlzylindern und Hohlkugeln, endlich auf Torsion von Zylindern und Biegung von Stäben; die letztgenannten beiden Anwendungen sind allerdings nicht von Neumann vorgetragen, sondern vom Herausgeber hinzugefügt. Sehr wichtig ist der folgende, die Elastizität kristallinischer Stoffe betreffende Abschnitt, der von den allgemeinsten, 36 voneinander unabhängige Konstante enthaltenden Gleichungen ausgeht, dann zeigt, wie sich diese Zahl je nach den Symmetrieverhältnissen reduziert (beim regulären System bleiben z. B. drei Konstante unabhängig), endlich die Zusammendrückung eines Kristalles durch

[1]) Vgl. Crelles Journ. 57, 281, 1860.

allseitigen Druck, und eines Kristallprismas durch einseitigen Druck, sowie die dabei entstehenden Winkeländerungen ausführlich bespricht.

Die nächsten Abschnitte betreffen die Anwendungen der elastischen Gleichungen auf Optik, und zwar wird die Fortpflanzung ebener Wellen zunächst in der Weise abgeleitet, wie es in der Theorie der doppelten Strahlenbrechung (s. S. 69 ff.) geschehen ist. Eine zweite, auf den Arbeiten C. Neumanns beruhende Darstellung geht, um die longitudinalen Schwingungen zu beseitigen, von der Annahme der Inkompressibilität des Äthers aus. Drittens wird auch die Lamésche Ableitung der Erscheinungen der Doppelbrechung reproduziert, und im Anschluß daran Cauchys und Neumanns eigene Dispersionstheorie entwickelt.

Nach den Anwendungen auf Optik folgen solche auf Akustik: Schwingungen gespannter Saiten und gespannter Membranen. Von besonderem Interesse ist dabei die Behandlung zweier miteinander verbundener Saiten; für die Reflexion und Brechung an der Verbindungsstelle der beiden Saiten ergeben sich Formeln, die mit den Fresnelschen Formeln für die Amplitude des reflektierten und gebrochenen Lichtes übereinstimmen.

Weiter wird aus den elastischen Gleichungen die Theorie des geraden Stoßes zylindrischer Stäbe hergeleitet, endlich die Formeln für die Biegung und die Schwingungen dünner Stäbe.

Die Grundlage für die Ausarbeitung der Elastizitätstheorie bildeten Neumanns Vorlesungen vom Winter 1857—1858. Daneben sind auch die späteren Vorlesungen von 1869—1870, 1870 und 1873—1874 benutzt; diesen letzteren, von W. Voigt bearbeiteten Vorlesungen ist der wichtige Abschnitt über Elastizität der Kristalle entnommen.

Bemerkt werden mag noch, daß Neumann in späteren Jahren, z. B. im Sommer 1864, auch das Problem der elastischen Platten nach Kirchhoffs Darstellung behandelte.

6. Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, herausgegeben von Carl Neumann. Leipzig 1887, 364 S.

Die Vorlesungen beginnen mit der Ableitung der allgemeinen Eigenschaften des Körperpotentials. Dabei wird auch die Transformation des Laplaceschen Differentialausdruckes in Zylinder-

und Polarkoordinaten erledigt. Die Entwicklung der in Polarkoordinaten ausgedrückten reziproken Entfernung zweier Punkte gibt Anlaß zur Einführung der einfachen, nur von einem Argument abhängenden Kugelfunktionen P_n sowie der Laplaceschen Kugelfunktionen Y_n mit zwei Argumenten. Es werden die wichtigsten diese Funktionen betreffenden Formeln abgeleitet, ebenso die Entwicklung einer Funktion nach Kugelfunktionen, ohne daß jedoch auf die Frage der Konvergenz der allgemeinen Kugelfunktionenreihe eingegangen wird; endlich wird das Potential eines homogenen Sphäroids berechnet. Weiter wird die entwickelte Theorie auf bestimmte physikalische Fragen angewandt, insbesondere auf die Gleichgewichtsfiguren rotierender inkompressibler Flüssigkeiten, die Theorie der Ebbe und Flut und die Gaussche Theorie des Erdmagnetismus. An letztere schließt sich eine Darstellung von Neumanns Methode zur Entwicklung einer Funktion nach Kugelfunktionen auf Grund gegebener Beobachtungen (vgl. die S. 127 ff. besprochene Arbeit). Es folgt die Poissonsche Theorie der elektrischen Verteilung. Die Grundvorstellungen dieser Theorie führen zu dem Begriff des Flächenpotentials, dessen wesentlichste Eigenschaften abgeleitet werden. Daran schließen sich allgemeine Erörterungen über die elektrische Verteilung mit Anwendung auf einfache Beispiele; dabei wird auch auf die Substitution neuer Massen an Stelle ursprünglich gegebener Massen eingegangen. Ferner werden nach dem Vorgange von Green sämtliche Aufgaben der elektrischen Verteilung wie die des stationären Temperaturzustandes auf die Ermittelung der sogenannten charakteristischen Funktion zurückgeführt, und eine analoge Reduktion wird auch für die Aufgaben der stationären elektrischen Strömung gegeben. In eigenartiger, einfacher und anschaulicher Weise wird sodann das Problem der Verteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln behandelt. Endlich werden die Aufgaben der elektrischen Verteilung auf dem verlängerten und abgeplatteten Rotationsellipsoid erledigt, nachdem als Vorbereitung dazu die Eigenschaften der Kugelfunktionen zweiter Art entwickelt sind und der Laplacesche Differentialausdruck auf elliptische Koordinaten transformiert ist.

Zugrunde gelegt sind den Vorlesungen über Potentialtheorie Hefte aus den Wintersemestern 1852—1853 und 1856—1857.

7. Vorlesungen über die Theorie der Kapillarität, herausgegeben von A. Wangerin. Leipzig 1894, 234 S.

In seinen Vorlesungen über Kapillaritätstheorie pflegte Neumann sowohl auf die Laplacesche, als auf die Gausssche Theorie einzugehen. Von beiden ist hier nur die letztere aufgenommen, da der sogenannte zweite Hauptsatz erst durch sie eine strenge Begründung erfahren hat.

Was den Inhalt der Vorlesungen betrifft, so beginnen sie mit einer Erörterung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten. Um aus demselben die Bedingungen für das Gleichgewicht einer Flüssigkeit abzuleiten, wird der Ausdruck für die Kräftefunktion der Molekularkräfte aufgestellt und reduziert. Das Verschwinden der ersten Variation dieses Ausdruckes ergibt die beiden Laplaceschen Sätze, und zwar werden dieselben zuerst unter der Voraussetzung, daß die Oberfläche der Flüssigkeit eine Zylinderfläche oder eine Rotationsfläche ist, sodann erst allgemein bewiesen.

Schließt sich Neumann bis hierher dem Gedankengange von Gauss an, dessen Resultate er in eigenartiger Weise darstellt, so geht er im folgenden über Gauss hinaus, indem er, was sich bei Gauss nicht findet, die allgemeinen Sätze auf verschiedene spezielle Fälle anwendet. Diese Anwendungen betreffen zunächst das Ansteigen, bzw. die Depression von Flüssigkeiten an ebenen Platten und in zylindrischen Röhren. Sodann wird untersucht, welche Änderungen der hydrostatische Druck durch die Kapillarwirkung erfährt. Es werden verschiedene hierher gehörige Aufgaben gelöst, wobei auch die Adhäsion von Flüssigkeiten an festen Körpern zur Besprechung gelangt. Eine fernere Aufgabe besteht in der Ermittelung der Gestalt von Flüssigkeitstropfen.

Weiter wird die Theorie auf den Fall mehrerer Flüssigkeiten ausgedehnt. Diese von Gauss nur angedeutete Erweiterung der Theorie ergibt einmal die Differentialgleichung für die Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten; sodann führt dieselbe zu einem neuen Satze, dem Neumannschen Satze. Derselbe bezieht sich auf die Winkel an der Randkurve eines Flüssigkeitstropfens, der auf einer anderen Flüssigkeit schwimmt. Es folgen spezielle Probleme des Gleichgewichtes einer Flüssigkeitsmasse, die sich innerhalb einer anderen Flüssigkeit von demselben oder von ver-

schiedenem spezifischen Gewichte befindet. Mehrere der hier wie in den früheren Abschnitten abgeleiteten Resultate sind vorher noch nicht veröffentlicht. Dasselbe gilt von verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Kapillaritätskonstanten, die im Anschluß an die Einzelaufgaben besprochen werden.

Zum Schluß wird ein Zusammenhang zwischen der Gaussschen und Laplaceschen Theorie entwickelt. Geht man, wie Gauss, von dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten aus und berücksichtigt, daß die Flüssigkeit inkompressibel ist, daß infolgedessen nicht nur ihr Gesamtvolumen, sondern auch das Volumen jedes einzelnen Elementes bei der Variation ungeändert bleiben muß, so erhält man einerseits eine Bedingung für die freie Oberfläche einer Flüssigkeit (bzw. für die Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten), aus der sich der erste Laplacesche Satz auf sehr einfache Weise ergibt. Andererseits führt dieselbe Betrachtung auch auf das Grundprinzip von Gauss.

Der Ausarbeitung der Kapillaritätstheorie liegt Neumanns Vorlesung aus dem Sommer 1864 zugrunde; daneben hat der Herausgeber Vorlesungen über die Gausssche Theorie vom Sommer 1857 benutzt, sowie Vorlesungen über die Laplacesche Theorie aus den Wintern 1861—1862, 1863—1864, 1872—1873. Den drei letztgenannten Vorlesungen sind insbesondere mehrere spezielle Aufgaben entnommen.

In einem Anhange wird im einzelnen angegeben, was jeder der genannten Vorlesungen entnommen ist. — In der Darstellung ist der Herausgeber in einem Punkte von Neumann abgewichen, nämlich bei der Ableitung der Variation einer Fläche, um den sich hierauf stützenden Beweis der Laplaceschen Sätze allgemeingültig zu machen und gleichzeitig zu vereinfachen.

II. Das Seminar.

1. Vorgeschichte und Gründung des Seminars.

Schon mehrere Jahre vor der Gründung des mathematisch-physikalischen Seminars, auf dessen hohe Bedeutung für die Entwicklung des mathematischen und physikalischen Studiums an der Königsberger Universität schon oben (S. 21) hingewiesen, war die Errichtung eines „Seminars für die gesamten Naturwissenschaften“ geplant, und zwar ging die Anregung dazu von

Baer[1]), Neumann, Meyer[2]) und Dove aus. In ihrer Eingabe vom 15. September 1828 sprachen diese die Überzeugung aus[3]), „daß die Naturwissenschaften ein wenigstens ebenso wichtiges Element für die allgemeine Volksbildung seien als die historisch-grammatischen Studien“, und fanden, „daß der Anspruch der Naturwissenschaften auf allgemeine Geltung nur deshalb noch nicht zur Anerkennung gebracht sei, weil nur wenige Schulmänner in diesem Fache gut unterrichtet worden seien“. Diesem Mangel solle das neue Institut abhelfen, es solle überhaupt zu gründlicheren Naturstudien anleiten, insbesondere aber Lehrer der Naturwissenschaften für Gymnasien und höhere Bürgerschulen bilden, fähig, die Wissenschaft nicht nur fortzupflanzen, sondern auch zu erweitern. Obwohl das Ministerium sich schon im Februar 1829 mit dem Antrage einverstanden erklärte, konnte es doch die für das Seminar erforderlichen Mittel (verlangt wurden 350 Taler jährlich, außerdem für die ersten drei Jahre noch je 150 Taler zur Anschaffung physikalischer Apparate) nicht gewähren. Die Eröffnung des Seminars unterblieb daher vorläufig. Erst als 1833 durch die Aufhebung des Herbartschen pädagogischen Seminars dessen Dotation verfügbar wurde, wurden die nötigsten Mittel (350 Taler jährlich) flüssig gemacht. Aber auch jetzt[4]) konnte das Seminar noch nicht ins Leben treten, da Baer 1834 Königsberg verließ und die ganze Angelegenheit bis zur Ernennung seines Nachfolgers vertagt wurde. Erst im Wintersemester 1835—1836 wurde das Seminar mit zwölf Teilnehmern eröffnet, jedoch ohne daß Neumann sich daran beteiligte[5]). Übrigens bestand das in Rede stehende Seminar nur wenige Jahre hindurch, gegen Ende der dreißiger Jahre ging es ganz ein; die dadurch frei werdenden Mittel (350 Taler) wurden 1839 dem mathematisch-physikalischen Seminar überwiesen.

---

[1]) Ernst v. Baer, 1792—1876.

[2]) Ernst Heinrich Friedrich Meyer, Botaniker, 1791—1858, vor allem bekannt durch seine unvollendet gebliebene Geschichte der Botanik.

[3]) H. Prutz, Die Königl. Albertus-Universität zu Königsberg i. Pr. im 19. Jahrhundert. Zur Feier ihres 350jährigen Bestehens. (Universitätsfestschrift.) S. 126. Königsberg 1904.

[4]) Ich folge hier den Angaben von Prutz.

[5]) Siehe weiterhin den ersten Seminarbericht (S. 153 oben).

Die Schwierigkeiten, welche sich der Eröffnung des Seminars für die gesamten Naturwissenschaften entgegenstellten, einerseits, die Notwendigkeit andererseits, besondere Einrichtungen für die Förderung und Belebung der mathematischen und theoretisch-physikalischen Studien zu treffen, veranlaßten Jacobi und Neumann, in Gemeinschaft mit dem damaligen Privatdozenten L. A. Sohncke (1807—1853, seit 1835 Professor der Mathematik in Halle a. S.), bei dem Ministerium die Gründung eines besonderen mathematisch-physikalischen Seminars zu beantragen. Dem Antrage vom 27. Februar 1834 war ein Statutenentwurf beigefügt, dem wir folgendes entnehmen. Das Seminar sollte in zwei Abteilungen zerfallen; die eine für reine und angewandte Mathematik (Mechanik, physische Astronomie), die andere für mathematische Physik. Als Mitglieder konnten alle Studierenden der Mathematik und Physik aufgenommen werden, die gewisse Vorkenntnisse besaßen, und zwar wurden in der Mathematik Kenntnisse der Differential- und der Elemente der Integralrechnung verlangt, in der Physik Kenntnis „der hauptsächlichsten im Fischerschen Lehrbuch behandelten Gegenstände". Zur Feststellung, ob dieser Forderung genügt sei, konnte von den Leitern des Seminars die Einreichung einer schriftlichen Arbeit oder eine mündliche Prüfung verlangt werden. Doch wurde diese Prüfung später als unzweckmäßig abgeschafft, um den minder Befähigten keine Gelegenheit zu verschließen, sich Kenntnisse zu erwerben. Die ordentlichen Mitglieder waren verpflichtet, an den Übungen beider Abteilungen teilzunehmen, sie durften auch nach dem Abgange von der Universität bis zur Anstellung Mitglieder bleiben. Neben den ordentlichen Mitgliedern konnten auch freie Zuhörer zugelassen werden. Während die Arbeiten der mathematischen Abteilung unter Jacobis Leitung auf die Lösung spezieller Probleme der höheren Mathematik gerichtet waren und daneben Sohncke in lateinischer Sprache über elementare Mathematik Übungen hielt [1]), sollten die von Neumann geleiteten Arbeiten der physikalischen Abteilung 1. in zusammenhängenden Vorträgen bestehen, welche abwechselnd von den Mitgliedern über einen bestimmten Zweig der mathematischen Physik zu halten waren; 2. in selbständigen Arbeiten der

[1]) Die von Sohncke geleitete Abteilung ging schon 1835 bei der Berufung Sohnckes nach Halle ein.

Mitglieder, welche entweder rein theoretisch sein sollten oder auf Grund einer mathematischen Theorie eigene Beobachtungen und Messungen erforderten. Für die beim Experimentieren erwachsenen Kosten sollte Ersatz geleistet werden; auch wurde für die Mitglieder, die größere Ausarbeitungen geliefert, eine Remuneration in Aussicht gestellt. Über die Seminararbeiten sollte dem Ministerium jährlich ein Bericht eingereicht werden.

Erwähnt sei hier gleich, daß Neumann in späteren Jahren die Aufgaben seiner Abteilung insofern modifiziert hat, als er die Vorträge fallen und dafür spezielle Probleme bearbeiten ließ, die in systematischer Ordnung verschiedene in dasselbe Gebiet einschlagende Fragen behandelten. Die Bearbeitungen mußten allwöchentlich eingereicht werden und wurden in der nächsten Seminarstunde besprochen. Die Seminarberichte, die in den Kuratorialakten der Königsberger Universität aufbewahrt werden, enthalten ein umfangreiches interessantes Material zur Geschichte des mathematisch-physikalischen Seminars. Auf ihnen, wie auf der im mathematisch-physikalischen Laboratorium der Königsberger Universität aufbewahrten Sammlung von Seminararbeiten beruht (neben persönlichen Erinnerungen des Verfassers aus seiner Studienzeit) die folgende Darstellung von Neumanns Wirksamkeit als Seminarleiter.

Am 8. Juni 1834 genehmigte das Ministerium den Antrag auf Errichtung des projektierten Seminars, sowie den eingereichten Statutenentwurf, letzteren zunächst provisorisch auf ein Jahr. Es sprach dabei seine Überzeugung aus, daß das Seminar „nicht nur für die dortige Provinz, sondern auch für den öffentlichen Unterricht in den königlichen Staaten überhaupt sehr wünschenswert“ sei. Als Dotation für das Seminar wurden jährlich 150 Taler in Aussicht gestellt, aber erst für spätere Zeit.

Und nun trat jenes Seminar ins Leben, das die vom Ministerium, sowie von seinen Gründern gehegten Erwartungen im höchsten Maße erfüllte. Hat es doch, wie Lindemann[1]) sagt, „eine ungewöhnliche Bedeutung erlangt durch die große Zahl hervorragender Gelehrter, die aus ihm hervorgegangen“, und zwar Mathematiker sowohl als Physiker, und hat es andererseits zur Ausbildung von tüchtigen mathematischen Lehrern wesentlich

[1]) Gedächtnisrede auf Philipp Ludwig v. Seidel, S. 48.

beigetragen und dadurch zur Hebung des mathematischen und physikalischen Gymnasialunterrichtes, zunächst in den Provinzen Ost- und Westpreußen. Das Königsberger Seminar war die erste derartige Anstalt in Deutschland; nach seinem Muster sind später an vielen Universitäten Deutschlands ähnliche Anstalten eingerichtet, z. B. das auf Veranlassung Seidels, der in Königsberg studiert hatte, in München gegründete Seminar, das im Anfang der sechziger Jahre errichtete mathematische Seminar der Berliner Universität, dem allerdings die physikalische Abteilung fehlt, und manche andere.

2. Das Seminar in den ersten Jahren seines Bestehens (1834—1839).

In den letzten Tagen des Novembers 1834 wurde das Seminar mit sechs Teilnehmern eröffnet, die bereits zwei bis sechs Jahre die Universität besucht hatten; unter ihnen sind hervorzuheben der Mathematiker Otto Hesse (1811—1874)[1]), Theodor Schönemann, später Gymnasialprofessor in Brandenburg a. H., der eine Reihe physikalischer und mathematischer Arbeiten veröffentlicht hat, Julius Czwalina, später Oberlehrer in Danzig, Verfasser mehrerer Programmarbeiten mathematischen Inhalts.

Über die Arbeiten der physikalischen Abteilung, an denen außer den sechs ordentlichen Mitgliedern noch J. H. C. E. Schumann, später Oberlehrer am altstädtischen Gymnasium in Königsberg, teilnahm, enthält der erste Seminarbericht folgendes: „Der Dirigent Professor Neumann erhielt nur eine selbständige Arbeit von stud. Hesse über die Interferenz des Lichtes, welches von dünnen Lamellen reflektiert und gebrochen wird, wo sämtliche Reflexionen und Refraktionen berücksichtigt waren. Die Tätigkeit der übrigen Mitglieder beschränkte sich darauf, einzelne vom Dirigenten proponierte Kapitel der Physik zu mündlichen freien Vorträgen zu bearbeiten, wozu wöchentlich zwei Stunden hintereinander festgesetzt waren. Da der Dirigent es für zweckmäßig gehalten hat, seine ganze Tätigkeit diesem Seminar zuzu-

[1]) Der Seminarbericht nennt ihn Anton Hesse, es unterliegt aber keinem Zweifel, daß Otto Hesse gemeint ist; ein Anton Hesse war nach Lindemanns Angaben damals gar nicht in Königsberg immatrikuliert.

wenden und deshalb eine Teilnahme am naturwissenschaftlichen Seminar aufgegeben, so wird er diese Übungen für die Folge zweimal wöchentlich leiten."

Die Vorträge, die von den einzelnen Mitgliedern gehalten wurden, waren folgende:

1. Czwalina: Über die Bewegung des einfachen Pendels a) im luftleeren Raume, b) im widerstehenden Mittel. Reduktion des zusammengesetzten Pendels auf das einfache.

2. Kade: Darstellung der Versuche von Cavendish über die Anziehung von Bleimassen. Die Herleitung der Dichtigkeit der Erde aus diesen Versuchen.

3. Busolt: Entwicklung der Formel von Laplace für die Höhenmessung durch das Barometer.

4. Schönemann: Über Hygrometrie im allgemeinen. Über das Saussuresche Hygrometer. Gay Lussacs Bestimmung der Bedeutung der Skala dieses Hygrometers.

5. Schumann: Über die Relation der Länge des Schließungsdrahtes einer galvanischen Kette und ihrer Wirkungsabnahme.

6. Pahlau: Über die an einem fertigen Thermometer anzubringende Kalibrierung und Berichtigung.

7. Hesse: Über die Interferenz des Lichtes im allgemeinen und Anwendung auf den Gegenstand seiner selbständigen Arbeit.

„Die Themata dieser Vorträge waren von dem Dirigenten proponiert, ausgenommen dasjenige des stud. Schumann, welches er sich selbst gewählt hatte, und dessen Darstellung sich durch Sicherheit und Klarheit auszeichnete. Die Vorträge waren von den Mitgliedern zuvor zu ihrem eigenen Gebrauche schriftlich ausgearbeitet, welche Ausarbeitungen aber bei dem mündlichen Vortrage nicht benutzt wurden. Einige dieser Aufsätze sind beigefügt. Die Vorträge der einzelnen Mitglieder füllten je nach dem Umfange des Gegenstandes die Zeit unserer Zusammenkünfte aus. Im allgemeinen hat der Dirigent den Mangel an physikalischen Kenntnissen bedauern müssen. Es ist zu hoffen, daß der Fortgang des Seminars zu einem ernstlicheren Studium der Physik veranlasse." Neumann schließt den Bericht mit folgendem Wunsche: „Der Dirigent kann es aber nicht verhehlen, daß ein hohes Ministerium wesentlich dazu beitragen würde, wenn Hochdasselbe zu den in den Lehrerprüfungen zu machenden Anforderungen die Bestimmung einer größeren schriftlichen Arbeit fügte."

In den nächsten zwei Semestern (Ostern 1835—1836) wurden die Seminarübungen nach demselben Plane unter Beteiligung von sechs Mitgliedern (Hesse wird 1835 nicht genannt) fortgesetzt. Dabei stach, wie Neumann in seinem Berichte hervorhob, die Tätigkeit der Mitglieder sehr vorteilhaft gegen diejenige im ersten Semester ab; namentlich sei der Eifer zweier Mitglieder, Schumann und Kade, zu loben, die sich beide durch Neigung und Talent für physikalische Studien auszeichneten, während die physikalischen Kenntnisse der übrigen Mitglieder noch viel zu wünschen übrig ließen. Von den zur Bearbeitung gestellten Aufgaben seien folgende erwähnt: Ort des Bildes bei Brechung durch ein Prisma, Doppelprisma ohne Ablenkung, achromatisches Prisma, Berechnung der kaustischen Linien eines Kreises, Konstruktion eines Fernrohres oder eines Mikroskops aus zwei gegebenen Linsen, verschiedene Aufgaben über Doppelbrechung im Kalkspat. Daneben finden sich Aufgaben über die Bewegung der Wärme in einer Reihe von Körpern, ferner über die Reduktion des physischen Pendels auf ein einfaches Pendel u. a. m. Man sieht also, daß es sich noch nicht, wie später vielfach, um die Behandlung schwieriger Probleme handelt, sondern um Übungsaufgaben von mehr elementarem Charakter.

Dem erfreulichen Aufschwung, welchen das Seminar im Jahre 1835—1836 genommen, folgte im Sommer 1836 ein bedauerlicher Rückschlag. Die ausgezeichneteren Mitglieder verließen die Universität, um Lehrer zu werden, oder wurden durch die Vorbereitungen zum Oberlehrerexamen zu sehr in Anspruch genommen, um noch für das Seminar arbeiten zu können. So kam es, daß im Sommer 1836 jede der Abteilungen nur drei Mitglieder zählte (nur ein Mitglied, Hesse, nahm an den Übungen beider Abteilungen teil); außerdem arbeitete der schon vorher genannte Schumann privatim bei Neumann. Bei den mündlichen Vorträgen wurde jetzt ein zusammenhängender Plan verfolgt (Thermometer, Barometer, absolute Maßbestimmungen, Methoden der spezifischen Gewichtsbestimmung und Methoden, die Ausdehnung durch die Wärme zu finden). Daneben wurden Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung gestellt; sie bezogen sich auf kleine Probleme, die sich in den mündlichen Vorträgen herausstellten.

In diesem Semester gewannen Jacobi und Neumann die Überzeugung, daß, um nicht eine eingeschränkte Tätigkeit im

Seminar zur Gewohnheit werden zu lassen, dasselbe einer Unterstützung wie die übrigen Universitätsseminare bedürfe, teils zu Remunerationen, besonders aber, um die jungen Leute selbst experimentierend und beobachtend auf eine erfolgreiche Weise beschäftigen zu können. Sie beantragten die Bewilligung der erforderlichen Mittel, und da solche nicht verfügbar waren, suspendierten sie zunächst für den Winter 1836—1837 das Seminar.

Über die folgenden beiden Jahre, Ostern 1837—1839, enthalten die Kuratorialakten nur einen Bericht des Regierungsbevollmächtigten an den Minister vom 17. Juni 1838, daß mancherlei sich entgegenstellende Schwierigkeiten die Direktoren veranlaßt hätten, die Übungen ganz oder teilweise einzustellen; die Direktoren behielten sich unter diesen Umständen vor, statt der Jahresberichte je nach Umständen einen Gesamtbericht für einen längeren Zeitraum zu erstatten. Die hier erwähnte Einstellung der Seminarübungen bezog sich jedenfalls nicht auf die physikalische Abteilung. In der dem mathematisch-physikalischen Laboratorium gehörigen Sammlung Neumannscher Seminararbeiten findet sich auch aus den Jahren 1837 und 1838 eine Reihe von Arbeiten, die zeigen, daß Neumann auch in diesen Jahren die Seminarübungen in derselben Art wie in den vorhergehenden Jahren fortgesetzt hat. Auch einige Mittel wurden ihm bewilligt, wie daraus hervorgeht, daß er in dieser Zeit zuerst Apparate zum Gebrauch im Seminar angeschafft hat.

3. Die weitere Entwicklung des Seminars.

Im April 1839 wurden endlich dem Seminar die geforderten Mittel im Betrage von 350 Talern jährlich dauernd bewilligt [1]. Zugleich wurden die Direktoren am Anfang des Sommersemesters 1839 aufgefordert, das Seminar ungesäumt zu eröffnen, „um so mehr, als jetzt Mathematiker selbst vom Auslande die Universität bezogen haben". Jacobi, der beurlaubt war, wurde durch Richelot vertreten. — Seit dieser Zeit hielt Neumann die

[1]) Nach Angabe von Prutz (S. 27) soll das mathematisch-physikalische Seminar erst infolge dieser Bewilligung ins Leben getreten sein. Das ist ein Irrtum, wie sich aus den Jahresberichten und den vorliegenden Seminararbeiten ergibt.

Übungen des Seminars regelmäßig bis zur Mitte der siebziger Jahre, mit Ausnahme weniger Semester, in denen er beurlaubt war. Die Zahl der Teilnehmer betrug 1839 sieben, hielt sich im nächsten Jahrzehnt mit geringen Schwankungen auf gleicher Höhe, stieg in der Mitte der fünfziger Jahre auf zehn, im Anfang der sechziger Jahre auf zwölf, Ende der sechziger Jahre auf fünfzehn bis achtzehn und sank seit 1871 auf neun bis elf.

a) Allgemeine Gesichtspunkte Neumanns bei Leitung des Seminars.

Über die allgemeinen Gesichtspunkte, die für Neumann bei den Seminarübungen maßgebend waren, spricht er sich folgendermaßen aus (Bericht über die Jahre 1847—1849):

„Bei der Leitung des Seminars ist die Ansicht von mir festgehalten, daß der Zweck desselben ein dreifacher sei. Einmal soll dasselbe den Studierenden die Lücken in ihren Kenntnissen zum Bewußtsein bringen, besonders denjenigen, welche dem Gymnasialunterricht näher stehen als den Universitätsstudien. Dann soll das Seminar diejenigen, welche schon mehr fortgeschritten sind, anleiten, physikalische Fragen selbständig einer mathematischen Behandlung zu unterziehen. Hierbei werden die jungen Männer genötigt, sich auf das, was sie gelernt haben, zu besinnen, dasselbe anzuwenden und es sich so zum wirklichen Eigentum zu machen. Zugleich aber erhalten sie auch die nach meiner Ansicht zweckmäßigste Vorbereitung, um physikalische Phänomene durch messende Beobachtungen zu bestimmen. Die Anstellung solcher Beobachtungen ist der letzte Zweck und das eigentliche Ziel, wohin die Mitglieder des Seminars zu führen ich mir zur Aufgabe gemacht habe."

In einem anderen Bericht, 1849—1850, sagt Neumann:

„Die Absicht, die ich bei dieser Leitung der Seminararbeiten verfolgte, war eine doppelte. Einmal wollte ich dahin wirken, daß die Mitglieder sich dasjenige, was die Vorträge ihnen dargeboten hatten, durch selbständige Anwendung desselben zu einem wirklichen Besitz aneigneten, und dann wollte ich dieselben anleiten, in den physikalischen Tatsachen diejenigen Gesichtspunkte zu finden und zu verfolgen, welche eine mathematische Behandlung zulassen."

Ferner sei noch aus dem Bericht 1850—1851 folgendes angeführt:

„Da im Sommersemester 1850 die physikalische Abteilung nur ältere Mitglieder hatte, die zum Teil in Begriff waren, die Universität zu verlassen, wurden die Gegenstände der Beschäftigungen von mir so gewählt, wie sie geeignet schienen, die Kluft zwischen theoretischer Einsicht und praktischer Ausführung bemerklich zu machen und darüber wegzuleiten. Ich beschäftigte die Mitglieder vorzugsweise praktisch, ich ließ sie namentlich messende Beobachtungen aus dem Gebiet des Magnetismus und Galvanismus machen. Wenn die erhaltenen numerischen Resultate auch wenig bedeutend waren und weniger, als ich sonst erreicht habe, so ist der Weg zu ihnen doch für die Teilnehmer, wie ich glaube, nicht ohne Nutzen gewesen. Sie wurden auf diesem Wege einmal gezwungen, sich Gegenstände deutlich zu machen, welche sie bis dahin als unerheblich beiseite hatten liegen lassen, dann aber auch durch denselben veranlaßt, auf Materien zurückzugehen, die sie aus den Vorlesungen hatten kennen gelernt, und diese wegen des Gebrauchs, der von ihnen gemacht werden sollte, sich zu einem mehr selbständigen Eigentum anzueignen.“

Je nach den Kenntnissen und der Vorbildung der Teilnehmer am Seminar trat von den angeführten Gesichtspunkten mehr der eine oder der andere in den Vordergrund. Daher sind auch die in verschiedenen Semestern gestellten Aufgaben von sehr ungleicher Art, bald einfachere Übungsaufgaben, bald schwierigere Probleme. Neumann selbst sagt in dem Bericht 1843—1845:

„Die Arbeiten haben einen verschiedenen Wert. Diejenigen der älteren Mitglieder des Seminars zeigen den Standpunkt der Bildung in der mathematischen Physik, welchen die Zöglinge des Seminars erreichen, während die der jüngeren zeigen, mit welch schwachen Kräften die Tätigkeit am Seminar zu beginnen hat.“

Wiederholt, wenn die Vorbildung der Teilnehmer eine zu ungleiche war, wurden die Übungen in zwei Abteilungen gehalten, deren eine in der Regel die neu eintretenden Mitglieder umfaßte, die andere die weiter fortgeschrittenen. Vielfach standen die schriftlichen Arbeiten in nächster Beziehung zu den Neumannschen Vorlesungen, derart, daß das, was in den Vorlesungen als bekannt vorausgesetzt oder sonst übergangen worden war, von den Mitgliedern reproduziert werden mußte, während die Geüb-

teren die in den Vorlesungen gegebenen Prinzipien auf spezielle Probleme anwenden mußten [1]). — „Bei der Auswahl der zur Bearbeitung gestellten Probleme war die Rücksicht leitend, entweder daß sie sich auf Gegenstände von praktischem Interesse bezogen oder daß die gewählten Aufgaben das Interesse erwecken sollten, die theoretisch geführte Untersuchung zur experimentellen Anwendung zu bringen" [2]).

Die früheren Klagen über mangelhafte Vorbildung sind, wie aus dem vorstehend mitgeteilten Berichte für die Jahre 1843—1845 hervorgeht, auch in den vierziger Jahren nicht ganz verstummt. Auch der Bericht über das Jahr 1846—1847 sagt in dieser Hinsicht: „Die Arbeiten der zweiten Abteilung zeigen, wie hier erst die physikalischen Begriffe gewonnen werden mußten, und mit welcher Mühe die gewonnenen zu einer solchen Fassung gebracht werden konnten, daß sie sich zu einer mathematischen Behandlung verwenden ließen." Allmählich aber werden derartige Klagen in den Seminarberichten immer seltener und hören späterhin ganz auf. Meist ist Neumann in der Lage, den Fleiß und das Streben der Teilnehmer, wie auch ihre Erfolge zu loben, so z. B. sagt der Bericht über das Jahr 1855—1856: „Aus den Arbeiten ist das Interesse und der Fleiß der Mitglieder zu erkennen", und der Bericht für 1856—1857: „Die rege Teilnahme und der Fleiß der Mitglieder sind um so höher zu veranschlagen, als ihre Zeit in der anderen Abteilung des Seminars nicht weniger in Anspruch genommen war." — 1858—1859 wird die andauernde und angestrengte Tätigkeit der Mitglieder gelobt, und 1864—1865 wird bemerkt: „Die Arbeiten zeigen, daß es gelungen ist, für diese zum Teil schwierigen Untersuchungen (Kapillarität und Kristalloptik) ein hinlängliches allgemeines Interesse zu erwecken."

b) Über die in verschiedenen Semestern im Seminar bearbeiteten Aufgaben.

Um ein Bild davon zu geben, wie Neumann bei den Übungen im einzelnen verfuhr, um das Ziel, das er sich gesteckt hatte, zu erreichen, greifen wir aus der Fülle des in den Seminar-

[1]) Bericht über das Jahr 1845—1846.
[2]) Bericht über das Jahr 1851—1852.

berichten gebotenen Materials einige charakteristische Berichte heraus, und ergänzen sie, indem wir aus der Sammlung von Seminaraufgaben einige spezielle Probleme anführen.

Ein Teil der Übungen war mehr auf die Einübung der Mitglieder in physikalischen und kristallographischen Messungen gerichtet. So wurde im Sommer 1840 die Theorie und der Gebrauch des Malusschen Goniometers erörtert.

„Das Instrument wurde als Beispiel behandelt, wie ein Instrument diskutiert werden muß, mit welchem man solche Resultate erzielt, daß man dafür die Grenzen der Zuverlässigkeit angeben kann. Es mußten die verschiedenen Fehlerquellen aufgesucht werden, und der Einfluß, welchen sie demnach auf das Endresultat ausüben, berechnet werden. Hierauf wurden von den einzelnen Mitgliedern Reihen von Messungen an Bergkristall, Beryll, schwefelsaurem Kali usw. angestellt, und diese mußten nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden. Es zeigte sich eine erfreuliche Rüstigkeit in der Ausführung solcher Arbeiten."

Für Anfänger wurden vielfach Aufgaben aus der Mechanik behandelt. Wir führen darüber den Bericht über die Jahre 1853—1854 an. „Bei den Mitgliedern der zweiten Sektion waren die mechanischen Grundbegriffe, soweit sie vorhanden waren, noch sehr schwankend, und es fehlte jede Übung, ein physikalisches Phänomen einer mathematischen Betrachtung zu unterwerfen. Ich wendete deshalb folgendes Verfahren an. Ich ließ an einem einfachen Instrument Beobachtungen anstellen und daraus durch Berechnung Resultate ziehen. Dann mußten die verschiedenen Voraussetzungen, welche in dem Instrument möglicherweise nicht ganz erfüllt waren, einzeln berücksichtigt, ihr Einfluß auf das Resultat berechnet werden. Auf diese Weise wurden die Messungen von elektrischen Drahtwiderständen und ihren Veränderungen durch die Temperatur behandelt. Im Winter, wo die Mitglieder meine Vorlesungen über theoretische Physik hörten, gab ich den Seminarübungen eine solche Richtung, daß die Mitglieder sich die mechanischen Grundlehren der Physik klar machen mußten und diese ihnen geläufig zur Anwendung wurden. Ich ließ die Bewegungen der Atwoodschen Fallmaschine mit Rücksicht auf das Gewicht der Fäden, das Trägheitsmoment der Rolle usw. untersuchen. Andere Aufgaben betrafen das Per-

kussionspendel, die einfacheren Fälle der Bewegung in einem widerstehenden Mittel, die Bewegung eines Pendels, auf welches diskontinuierliche Kräfte wirken. Als Anwendung der Lehre von den Drehungsmomenten ließ ich die Ablenkung einer Magnetnadel durch einen Magneten berechnen. Diese Rechnung wurde auf Beobachtungen angewendet, die ich von den Seminarmitgliedern selbst anstellen ließ. Diese Beobachtungen und andere Schwingungsbeobachtungen mußten nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden."

„Ich glaube durch diese Beschäftigung" (mit einfacheren mechanischen Aufgaben), sagt Neumann, „die Teilnehmenden empfänglich gemacht und wohl vorbereitet zu haben für ein weiteres Studium der Mechanik, worüber dieselben noch keine Vorlesung gehört hatten."

Der Nutzen, der den Seminarmitgliedern aus der Behandlung von solchen mechanischen Aufgaben erwuchs, hat Neumann veranlaßt, ähnliche Übungen wiederholt zu veranstalten. Aus den Berichten über diese Übungen seien hier noch folgende Aufgaben erwähnt: Fortpflanzung kleiner Erschütterungen in einem System diskreter Massenteilchen, die Theorie des Stoßes, Theorie der Wage und der Brückenwage, Berechnung der Newtonschen Fallversuche in Luft und Wasser, Theorie des ballistischen Pendels, Berechnung damit angestellter Versuche, Ermittelung der Kraft, welche zum Zerreißen von Holzfasern angewandt werden muß, Einfluß einer zylindrischen Schneide und Einfluß des Widerstandes auf die Schwingungen des Pendels.

Wiederholt (z. B. Winter 1856—1857, Winter 1865—1866) wurden im Seminar die allgemeinen Grundsätze der relativen Bewegung entwickelt und die Mitglieder veranlaßt, dieselben auf die Benzenbergschen Fallversuche anzuwenden und diese numerisch zu berechnen. Auch auf die Foucaultschen Pendelversuche wurden diese Grundsätze angewandt. Eine letzte Anwendung war (Winter 1865—1866) die auf die hydrostatische Frage nach der Gleichgewichtsfigur der rotierenden Erde unter dem Einfluß des Mondes. Hierbei kam auch die Frage zur Sprache nach dem Einfluß des Mondes auf die Schwingungsdauer des Pendels.

Im Jahre 1872—1873 wurden Fragen folgender Art behandelt: Hat die Erdatmosphäre nach hydrostatischen Gesetzen

eine Grenze? Welche Dichtigkeit besitzen die Gase der Atmosphäre im Weltraum? Bestimmung der Dichtigkeit derselben Gase an der Oberfläche der Sonne und anderer Himmelskörper. Diese Probleme wurden zuerst ohne Berücksichtigung der gegenseitigen Anziehung der Gasteile behandelt, dann die viel schwierigere Frage mit Berücksichtigung dieser Anziehung. Das Interesse der Mitglieder zeigte sich darin, daß dieselben zum Teil selbst den Problemen eine größere Ausdehnung gaben. Schließlich wurde in dieser Reihe von Untersuchungen noch das Problem der Gleichgewichtsfläche unserer Atmosphäre mit Berücksichtigung der Anziehung fremder Himmelskörper behandelt.

Auch auf die Hydrodynamik wurden die Übungen ausgedehnt. So wurden (Winter 1856—1857) die hydrodynamischen Gleichungen mit Berücksichtigung der Reibung abgeleitet und auf die Bewegungen angewandt, welche in einer Flüssigkeit durch rotierende Zylinder oder Kugeln erzeugt werden; diese Untersuchungen wurden dann im Sommer 1857 fortgesetzt und zugleich Experimente angestellt, um die Ergebnisse der theoretischen Rechnungen zur Bestimmung der Reibungskoeffizienten verschiedener Flüssigkeiten anzuwenden. Zwei der Zuhörer, O. E. Meyer und C. J. H. Lampe (gestorben als emeritierter Gymnasialprofessor in Danzig), führten ihre Beobachtungen soweit durch, daß sie mit ihren Resultaten die von der philosophischen Fakultät gestellte Preisfrage beantworten konnten.

In einem späteren Semester (Sommer 1871) wurden die in Rede stehenden allgemeinen Gleichungen auch auf die Bewegung von Flüssigkeiten in engen Röhren angewandt. (Ableitung des Poiseuilleschen Gesetzes.)

In anderen Semestern wurden die Aufgaben aus der Elastizität und Kapillarität gewählt. So sagt der Bericht 1860—1861:

„Die weiteren Übungen schlossen sich mehr an meine Vorlesung über die Theorie der Elastizität an, welche die Mitglieder im vorangegangenen Semester gehört hatten. Es mußte die lebendige Kraft eines Systems elastisch bewegter Massen bestimmt werden. Es mußten die Gleichungen für die Bewegungen eines elastischen Körpers mittels des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten abgeleitet werden. Auf Grund dieser Methode wurden

die Bewegungen eines elastischen Stabes untersucht und die Gleichungen für eine elastische Platte aufgestellt.

„Im zweiten Semester beschäftigten sich die Mitglieder mit Untersuchungen aus der Lehre von den kapillaren Erscheinungen. Ich hatte in meiner Vorlesung die Laplacesche Theorie der Kapillarität vorgetragen. Hier mußte das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in Beziehung auf die kapillaren Phänomene durchgeführt werden. Die Mitglieder wurden veranlaßt, namentlich die allgemeinen Bedingungen zu finden, welche an der Grenze zweier Flüssigkeiten zu erfüllen sind. Es wurde dann dieser neue Weg in Beziehung auf verschiedene einzelne Erscheinungen durchgeführt, namentlich solche, deren Beobachtung, verglichen mit dem theoretischen Ergebnis, zur Bestimmung der Konstanten dienen kann. Es wurden auch die Bewegungen untersucht, welche durch kapillare Kräfte erzeugt werden, und die Kraft bestimmt, die nötig ist, um solche Bewegungen zu hindern. Es wurde der Einfluß der Kapillarität auf spezifische Gewichtsbestimmungen untersucht, einige Methoden behandelt zur Ermittelung der Depression des Quecksilbers im Barometer usw. Bei diesen und ähnlichen Anwendungen der Gaussschen Grundformeln hatten sich die beiden Hauptsätze der Laplaceschen Theorie immer beiläufig ergeben. Die Mitglieder des Seminars wurden nun veranlaßt, diese Sätze allgemein aus der Gaussschen Theorie abzuleiten und dahin zu erweitern, daß sie auch das Gesetz für die Winkel aufsuchten, unter welchen sich die drei Oberflächen zweier Flüssigkeiten schneiden, von denen die eine auf der anderen schwimmt“ (Neumannscher Satz), „und das Gesetz für den Winkel, unter welchem eine zwei Flüssigkeiten gemeinschaftliche Oberfläche die Oberfläche eines festen Körpers schneidet. Einer sehr eingehenden Untersuchung wurde die Frage unterworfen nach den Gleichgewichtsfiguren einer Flüssigkeitsmasse, die im Inneren einer anderen Flüssigkeit schwebt und in eine rotierende Bewegung versetzt ist.“ (Plateaus Versuche.)

Wie aus dem bisher Angeführten hervorgeht, wurden in jedem Semester nur einzelne Kapitel der Physik behandelt, doch wechselten diese Kapitel in der Regel von Semester zu Semester, so daß die Übungen der verschiedenen Semester fast das ganze Gebiet der Physik umfaßten. Bisweilen kam es vor, daß mehrere Semester hintereinander die Übungen demselben Teil der Physik entnommen

wurden. So wurden 1863—1864 auschließlich Aufgaben aus der Wärmelehre behandelt. Der Bericht über dieses Jahr lautet folgendermaßen:

„Im Sommersemester wurden zunächst die allgemeinen Grundsätze erklärt, auf welchen die analytische Theorie der Bewegung der Wärme in festen Körpern [1]) beruht, und dann durch die Mitglieder zur Anwendung gebracht. Es wurden von ihnen die Gesetze der Temperaturverteilung in einer Kugel, wenn dieselbe nur eine Funktion des Radius und der Zeit ist, entwickelt, und hieraus mußten Regeln abgeleitet werden, nach welchen durch Beobachtungen des Temperaturzustandes einer solchen Kugel in verschiedenen Zeiten die Konstanten der Theorie bestimmt werden können. Es wurden die durch Abkühlung der Kugel im Inneren derselben entstehenden Spannungen bestimmt, es wurde die Veränderung ermittelt, welche eine sich abkühlende rotierende Kugel in ihrer Rotationsgeschwindigkeit durch die Abkühlung erleidet. Dies wurde auf die Erdkugel angewandt. Die Formeln für die Bewegung der Wärme in einer Kugel mit konzentrischer Temperaturverteilung mußten erweitert werden durch Berücksichtigung des Umstandes, daß das äußere Leitungsvermögen der Wärme nicht unabhängig von der Temperatur ist, also mit Berücksichtigung der Dulongschen Gesetze der Abkühlung. Namentlich mußte der Einfluß ermittelt werden, welchen dieser Umstand auf die Regeln zur Bestimmung der Konstanten durch die Beobachtung ausübt.

„Die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung der Wärme mußten für den Fall einer Kugel transformiert werden. Es wurde der stationäre Temperaturzustand einer Kugel bestimmt, wenn die Temperatur ihrer Oberfläche eine gegebene Funktion der Länge und Breite ist. Dies wurde auf die Erdkugel angewandt. Es mußte Größe und Richtung der mittleren Wärmeflut numerisch berechnet werden, welche im Innern der Erde von den Äquatorialgegenden zu den Polargegenden infolge der Sommererwärmung strömt.

„Im Winter wurden diese Untersuchungen weiter geführt und dabei besonders ihre praktische Verwertung berücksichtigt.

---

[1]) Vor der Ableitung der Gleichungen der Wärmeleitung in Körpern ließ Neumann wiederholt als Einleitung dazu die Bewegung der Wärme in einem System diskreter Massenteilchen behandeln.

„Es wurden zunächst die Untersuchungen über die Methode der Mischung zur Bestimmung der spezifischen Wärme erweitert, indem die eingetauchten Körper als Kugeln betrachtet wurden, und die Bewegung der Wärme innerhalb dieser Kugeln während der Mischung berücksichtigt werden mußte. Es wurde die Theorie der elektrischen Multiplikatoren als thermometrischer Instrumente behandelt, und es mußten Regeln abgeleitet werden, nach welchen bei stetig abnehmenden Strömen die Stromstärken in bestimmten Zeitmomenten zu bestimmen sind.

„Hierauf wurde die Bewegung der Wärme behandelt in einem System von Wärmeleitern, bestehend aus einem Ring oder Stab mit eingelöteten Thermoketten. Es mußten die Vorschriften für die Beobachtungen der Thermoströme dieser Ketten entwickelt werden, damit sich aus denselben die Konstanten ableiten lassen. Es wurden die periodischen Bewegungen der Wärme in einem Stabe untersucht, dessen Enden abwechselnd in gleichen Zeitintervallen mit zwei ungleichen Wärmequellen in Berührung gebracht werden. — Der letzte Gegenstand war die Bewegung der Wärme in der Erde. Es kam darauf an, die Untersuchungen so weit führen zu lassen, daß ersichtlich wurde, wie durch die Beobachtungen über den Gang der Temperatur in den oberen Schichten der Erdoberfläche die verschiedenen Ursachen dieses Temperaturganges, nämlich die Sonnenerwärmung, die Ausstrahlung und die ursprüngliche Erwärmung der Erde, sich trennen und numerisch bestimmen lassen.

„Schließlich mußten die Seminarmitglieder noch die Gleichungen entwickeln für solche Fälle, wo durch die Bewegung der Wärme selbst eine Wärmequelle erregt wird, wie dies beim Gefrieren eines wässerigen Erdbodens der Fall ist.

„Neben diesen theoretischen Arbeiten fanden noch praktische Übungen statt, sie bezogen sich auf die Bestimmung von spezifischen Wärmen und auf Winkelmessungen an Kristallen und deren Berechnung.“

Aus persönlicher Erinnerung kann ich, da ich im Winter 1863—1864 in das Seminar eintrat, diesem Berichte noch folgendes hinzufügen. Im Beginn des Wintersemesters wurde eingehend die Kalibrierung der Thermometer erörtert. Die Seminarmitglieder wurden veranlaßt, sich eigene Thermometer zu verfertigen, wozu ihnen gefüllte Thermometerröhren und ein Metallstab

geliefert wurden, den sie auf der Teilmaschine nach einer willkürlichen Skala teilen mußten; sie hatten dann die Fixpunkte und die genauen Werte der einzelnen Skalenteile zu ermitteln. Diese praktischen Übungen, wie die vorerwähnten über Bestimmung von spezifischen Wärmen usw., fanden nachmittags in Neumanns Wohnung statt.

Den Berichten über andere Semester, in denen ebenfalls Aufgaben aus der Lehre von der Wärme behandelt wurden, entnehmen wir noch folgendes:

Es wurden Beobachtungsmethoden in der Art besprochen, daß die Nebenumstände, welche auf die durch diese Methoden beabsichtigten Resultate von störendem Einfluß sind, hervorgehoben wurden, und die Mitglieder angeleitet, durch mathematische Betrachtungen diese störenden Einflüsse zu verfolgen, sie der Form nach quantitativ zu bestimmen und hieraus Mittel abzuleiten, durch welche diese Einflüsse unschädlich gemacht werden könnten. Hieran knüpften sich dann mehr theoretische Untersuchungen, die jedoch in solcher Richtung geleitet wurden, daß ihre Resultate mit der Erfahrung vergleichbar wurden. (Winter 1849—1850.)

Die Untersuchungen über die Wärme bezogen sich auf das spezielle Problem der Bewegung derselben in unserer Erde. Es wurde zunächst die Bewegung des Teils der Erdwärme behandelt, der von ihrer ursprünglichen Wärme noch vorhanden ist, und der Einfluß bestimmt, welchen seine säkuläre Veränderung auf die Rotationsgeschwindigkeit der Erde hat. In der Behandlung des Teils der Erdwärme, welche von der mittleren Temperatur der Oberfläche der Erde herrührt, wurden die isothermen Erdschichten näher diskutiert und die Orte auf der Erdoberfläche bestimmt, welche durch innere Wärmeströmung in Verbindung stehen. Endlich wurde der periodische Teil behandelt und die Funktion, durch welche die Erwärmung der Erdoberfläche durch die Sonne dargestellt wird, vollständig entwickelt. Die Endformeln wurden auf Beobachtungen der Erdtemperatur in verschiedener Tiefe, die in Königsberg angestellt worden sind, angewandt, und die thermischen Konstanten der Erde für Königsberg bestimmt. (Winter 1858—1859.)

Noch sei erwähnt, daß wiederholt auch (z. B. Winter 1856 bis 1857) Aufgaben, die die Wärmeleitung in kristallinischen

Medien betrafen, gestellt, daß ferner für die Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit verschiedene Methoden entwickelt und erörtert wurden, so unter anderem (Winter 1863—1864, Sommer 1866) die Ångströmsche Methode. In anderen Semestern wurde die Theorie des Pouilletschen Pyrheliometers behandelt. Endlich wurden mehrfach allgemeine Fragen, wie die Eindeutigkeit der Lösungen der Wärmeleitungsaufgaben, in den Kreis der Betrachtungen gezogen.

In der Optik kehren einfache Aufgaben der geometrischen Optik, wie sie in den ersten Jahren viel gestellt waren, später nur selten wieder; dagegen wurden öfter Aufgaben gestellt, die die Gaussschen Hauptpunkte und Hauptebenen betrafen. Daneben wurden vorwiegend Probleme der theoretischen Optik behandelt, einerseits solche, zu deren Erörterung in der Vorlesung über Optik keine Zeit gewesen war (so sind wiederholt die Formeln für Reflexion und Brechung an Kristallflächen behandelt), andererseits solche, die von den Zuhörern eine selbständige Weiterentwicklung der in der Vorlesung vorgetragenen Theorie verlangten. Aufgaben der letzteren Art wurden z. B. im Winter 1854—1855 vorgelegt. „Ich ließ die Theorie der Farbenringe in zweiachsigen Kristallen vollständig ausarbeiten und diejenigen Mitglieder, denen dies gelungen war, auf Grund der selbstentwickelten Formeln Messungen dieser Ringe an Kristallen anstellen und daraus die Elemente der doppelten Strahlenbrechung ableiten."

Im Wintersemester 1864—1865, in dem ich selbst an den Seminarübungen teilnahm, wurden zunächst Probleme ganz anderer Art behandelt.

Neumann erörterte zuerst die Erscheinungen der Zirkularpolarisation im allgemeinen, sowie die Erzeugung zirkular polarisierten Lichtes durch das Fresnelsche Parallelepipedon. Da schon bei geringer Inhomogenität des Glases, bei Spannungen, wie sie durch ungleichförmige Abkühlung entstehen, Störungen der Erscheinung hervorgebracht werden, so wandte Neumann zur Erzeugung der totalen Reflexion ein Parallelepipedon an, dessen Seitenflächen aus Tafelglas bestanden, während der Innenraum mit Wasser gefüllt war. Es wurde die Aufgabe gestellt, welches die Winkel des Parallelepipedons sein müssen, damit ein eintretender geradlinig polarisierter Strahl nach zweimaliger

totaler Reflexion im Innern in einen zirkular polarisierten verwandelt wird. Sodann wurden die Farbenerscheinungen berechnet, welche eintretendes zirkular polarisiertes Licht in einer Kalkspatplatte hervorbringt. Weiter wurden die optischen Erscheinungen im Bergkristall (nach Fresnel und Airy) beschrieben und demonstriert. Daran schloß sich die Berechnung der Farbenerscheinungen in dünnen Quarzplatten unter den verschiedensten Umständen, wie verschiedene Orientierung der Platte, verschiedene Polarisation (geradlinige und zirkulare des einfallenden und austretenden Lichtes), Kombination einer links und einer rechts drehenden Platte usw.

Es folgte eine mechanische Theorie der Erscheinungen der zirkularen und elliptischen Polarisation. Schon Mac Cullagh hatte erkannt, welche Modifikation die Differentialgleichungen der doppelten Strahlenbrechung erfahren müssen, um aus ihnen die Erscheinungen, wie sie der Bergkristall darbietet, abzuleiten, und Cauchy hatte diese Betrachtung auf zweiachsige Medien ausgedehnt. Da aber die Bedeutung der hinzuzufügenden Glieder vollkommen im unklaren blieb, so hatten die genannten Untersuchungen den Charakter einer Interpolation. Der erste Versuch, den Ursprung der betreffenden Glieder zu erklären, ist von C. Neumann in seiner Habilitationsschrift[1]) gemacht, indem er annahm, daß zu den gewöhnlichen Molekularkräften noch Kräfte hinzukommen, die wie elektrische Stromelemente auf Magnetpole wirken. Diese Erklärung, fügt F. Neumann hinzu, ist zwar noch nicht genügend begründet, führt aber zu Resultaten, die der Erfahrung entsprechen.

Die durch Hinzufügung der neuen Kräfte erweiterten Gleichungen der Elastizität lauten z. B. für Kristalle des regulären Systems, wenn u, v, w die den Achsen des Systems parallelen Verrückungen darstellen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (A - 3\,a)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\left(\varDelta u + 2\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + a'\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

[1]) Halle 1858. Der Titel der Schrift lautet: Explicare tentatur, quomodo fiat ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur. — Siehe auch die Schrift: Die magnetische Drehung der Polarisationsebene. Halle 1863.

und analog für die beiden anderen Komponenten. Darin ist

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Durch das mit a' multiplizierte Glied entstehen die drehenden Eigenschaften; für $a' = 0$ gehen die Differentialgleichungen in die der Theorie der doppelten Strahlenbrechung zugrunde gelegten Gleichungen über (vgl. S. 72). Neumann modifiziert die Gleichungen noch, indem er den Äther als inkompressibel annimmt, also die räumliche Dilatation $\theta = 0$ setzt. Dann lautet die obige Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (A - 3a)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\,\Delta u + a'\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

wo λ eine unbekannte Funktion ist (s. Theorie der Elastizität).

Diese allgemeinen Gleichungen hatte Neumann selbst entwickelt, die Seminarmitglieder mußten die Integration durchführen, und zwar wurde zunächst der Fall behandelt, daß $a' = 0$ ist, das Medium also keine drehende Eigenschaft besitzt, während von der in der Theorie der doppelten Strahlenbrechung eingeführten Annahme $A - 3a = 0$ abstrahiert wurde. Die Integration der Gleichungen führt dann zu der merkwürdigen Folgerung, daß auch im regulären System Doppelbrechung von eigentümlicher Natur stattfinden muß, daß es z. B. sieben Richtungen gibt, in denen keine Doppelbrechung auftritt, also sieben optische Achsen. Weiter mußten die vorstehenden Gleichungen integriert werden unter der Annahme $A - 3a = 0$, $a' \lesseqgtr 0$. Als Resultat ergibt sich, daß in dem Kristall in jeder Richtung sich zwei zirkular polarisierte Strahlen von entgegengesetztem Drehungssinn mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen. Die Resultate wurden dann auf Kristalle mit ungleichen Achsen, doch unter der Annahme der Existenz dreier rechtwinkliger Symmetrieebenen ausgedehnt. Führt man auch hier die Bedingung der Inkompressibilität des Äthers ein, so lassen sich die Grundgleichungen in folgende Form bringen. Sind u, v, w die Verrückungen, ist ferner

$$U = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y},\quad V = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z},\quad W = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

so ist

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a \Delta U - \frac{\partial}{\partial x}\left(a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial V}{\partial y} + c \frac{\partial W}{\partial z}\right)$$
$$+ a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

und analog für V, W.

Die Integration dieser Gleichungen unter der Annahme ebener Wellen führt zu dem Resultat, daß sich in jeder Richtung zwei Wellen mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen, beide Schwingungen sind elliptisch polarisiert und von entgegengesetztem Rotationssinn. In beiden ist die Lage der Ellipsenachsen für jede Fortpflanzungsrichtung eine ganz bestimmte, unabhängig von der einfallenden geradlinig polarisierten Welle, und ebenso verhält es sich mit dem Verhältnis der Ellipsenachsen. Zirkulare Polarisation findet nur in denjenigen Richtungen statt, die den optischen Achsen des nicht drehenden Kristalls entsprechen (d. h. in den Linien, die bei $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$ in die optischen Achsen übergehen); während aber bei nicht drehenden Kristallen die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in diesen Richtungen gleich sind, sind sie bei drehenden Kristallen ungleich. Zum Schluß macht Neumann noch eine Bemerkung über die Änderungen, die eintreten würden, wenn man die Grundgleichungen in ähnlicher Weise erweiterte, wie es in der Cauchyschen Dispersionstheorie geschieht (vgl. nächsten Absatz).

Die nächsten Aufgaben bezogen sich auf die Metallreflexion. Es wurden die Erscheinungen der Metallreflexion beschrieben, und die Seminaristen hatten die verschiedenen Methoden zu untersuchen, welche zur Beobachtung der relativen Intensität und Verzögerung der beiden Lichtkomponenten bisher in Anwendung gebracht waren. Insbesondere war die Theorie der Soleilschen Platten und des Babinetschen Kompensators auszuarbeiten. Hieran schloß sich eine theoretische Ableitung der Gesetze der Metallreflexion. Die Grundlage bildeten die Gleichungen, die Cauchy für seine Dispersionstheorie entwickelt hat, nur daß dabei von vornherein die Bedingung der Inkompressibilität eingeführt wurde. Diese Gleichungen ergeben sich folgendermaßen. Bei der Ableitung der allgemeinen Elastizitätsgleichungen nach der Poissonschen Methode wird die relativ

Verrückung zweier Teilchen nach dem Taylorschen Satze entwickelt, und die Entwicklung bei der zweiten Potenz der Entfernung der Teilchen abgebrochen. Berücksichtigt man bei jener Entwicklung noch die folgenden Glieder bis zur vierten Potenz jener Entfernung, so erhält man die Cauchyschen Gleichungen. Setzt man in ihnen die räumliche Dilatation gleich Null, so nehmen sie, unter u, v, w die Komponenten der Verrückungen verstanden, die einfache Form an:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = n D u + p D^2 u,$$

und analog für die anderen Komponenten. Darin ist

$$D u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad D^2 u = D(D u)$$

(vgl. Vorlesungen über Elastizität, § 129, S. 482).

Die Grenzbedingungen für die Reflexion sind folgende: a) Die drei Komponenten der Bewegung sind in der Grenzebene beider Medien dieselben, möge man jene Ebenen als zu dem einen oder zu dem anderen Medium gehörig ansehen. — Es ist das dieselbe Annahme, die Neumann auch in seiner Theorie der gewöhnlichen und der Kristallreflexion macht; sie liefert drei Bedingungsgleichungen. b) Als vierte Gleichung ist hier nicht, wie bei der partiellen Reflexion, die Gleichung der lebendigen Kraft zu nehmen. Wir wissen durch direkte Beobachtung, daß in der Metallreflexion wirklich ein Teil des Lichtes verloren geht. Nun läßt sich aber bei der partiellen Reflexion die quadratische Gleichung, die der Satz der lebendigen Kraft ergibt, auf eine lineare Gleichung reduzieren, und letztere hat einen bestimmten physikalischen Sinn, den nämlich, daß die zur Reflexionsebene senkrechte Komponente der elastischen Kraft denselben Wert hat, man mag die Grenzteilchen als dem einen oder dem anderen Medium angehörig ansehen. Diese Gleichung wird auch hier zugrunde gelegt.

Der weitere Gang der Rechnung ist nun wie bei der gewöhnlichen Reflexion, nur mit der Modifikation, daß im reflektierten Lichte die komponierenden Strahlen eine gewisse Verzögerung erleiden, und daß bei der gebrochenen Welle, die ja erfahrungsgemäß in geringer Tiefe verschwindet, ein Exponentialfaktor hinzugefügt wird.

Auf die Resultate der skizzierten Entwicklung einzugehen, würde hier zu weit führen. Nur das sei noch bemerkt, daß die Rechnung bis zu einem gewissen Punkte streng durchgeführt, später durch die Annahme, daß der Extinktionskoeffizient sehr groß ist, vereinfacht wird. Die sich ergebenden Formeln sind mit den aus direkten Beobachtungen abgeleiteten Interpolationsformeln (s. Arbeit über Metallreflexion, S. 77) auf keine Weise in Übereinstimmung zu bringen, während die numerischen Resultate beider Formeln mit den Beobachtungen übereinstimmen. Den Schluß der Übungen bildete die Ableitung der Gesetze der Kristallreflexion für einachsige und zweiachsige Medien.

Aus anderen Semestern erwähnen wir noch die Behandlung verschiedener spezieller Probleme der Kristallreflexion (z. B. 1870 bis 1871), die Entwicklung der Theorie verschiedener optischer Apparate, z. B. des Nicolschen Prismas, wobei auch die Konstruktion eines solchen aus einem zweiachsigen Medium zur Sprache kam (z. B. 1867—1868); endlich Aufgaben der accidentellen Doppelbrechung, die der großen Abhandlung von 1841 entnommen waren.

Magnetismus und Elektrizität. Der Erdmagnetismus wurde im Seminar zum ersten Male im Jahre 1839—1840 behandelt. Der Seminarbericht über dieses Jahr sagt:

„Die Übungen betrafen die Ausführung der von Gauss zur absoluten Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus gegebenen Methode. Es war hierbei nötig und wichtig, die Elemente der Beobachtungskunst, als Zählen der Chronometerschläge, Berichtigung der Bussole usw., praktisch einzuüben. Die mündlichen Vorträge knüpften an Gauss' „intensitas vis magneticae“ an, die dem Seminar zuerst in mathematischer, dann in physikalischer Hinsicht erläutert wurde. Die schriftlichen Arbeiten betrafen die Theorie des magnetischen Inklinatoriums und die des Bifilarmagnetometers.“

Im Anschluß an diese Übungen wurde am 14. Juni 1839 die Intensität des Erdmagnetismus in Königsberg bestimmt. Ferner wurden seit Anfang 1841 mehrere Jahre hindurch unter Leitung eines älteren Mitgliedes (v. Behr, später Realschulprofessor in Königsberg) von den Seminarmitgliedern regelmäßige magnetische Beobachtungen angestellt über die Variation der Intensität und der Deklination. Ähnliche Übungen wurden öfter

wiederholt und mit ihnen Aufgaben verbunden, die Anwendungen der elektrischen Ströme betrafen, so u. a. im Sommersemester 1865.

„Im Sommer begannen die Übungen mit der schärferen Entwicklung der Gaussschen Methode zur Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus, wobei namentlich näher auf die verschiedenen Verfahrungsarten zur Ermittelung des Trägheitsmoments (z. B. durch die bifilare Aufhängung) eingegangen wurde.

„Die Methode selbst mußte von den Mitgliedern dahin modifiziert werden, daß statt des Chronometers die bifilare Aufhängung des ablenkenden Magneten angewandt wurde, und daß statt des ablenkenden Magneten elektrische Ströme benutzt wurden.

„Da auf diesem Wege nur die horizontale Komponente des Erdmagnetismus erhalten wird, wurde die Tätigkeit der Mitglieder des Seminars auf die Methode zur Bestimmung der magnetischen Inklination gerichtet. Es mußte von ihnen die Theorie des gewöhnlichen Inklinatoriums entwickelt werden, wobei die älteren Einrichtungen von Bernoulli, Euler usw. berücksichtigt wurden. Hieran schloß sich die Behandlung der übrigen Methoden, die zur Bestimmung der Inklination angewandt worden sind. Die Behandlung des Weberschen Inklinatoriums gab eine gute Veranlassung für die Anwendung der Theorie der induzierten Differentialströme. Diese Anwendungen der Theorie der induzierten Differentialströme wurden weiter verfolgt, namentlich derjenigen, welche durch die Bewegungen des Multiplikatormagneten in diesem erregt werden. Es mußte ihr Einfluß auf die Amplitude der Schwingungen ermittelt werden. Diese Untersuchung wurde auf die Wirkung von Integralströmen sehr kurzer Dauer auf die Multiplikatornadel ausgedehnt und hieraus das Webersche Verfahren zur Bestimmung elektrischer Widerstände abgeleitet.

„Die Webersche Methode zur Messung solcher Integralströme von kurzer Dauer wurde speziell behandelt, die Multiplikations-, die Reflexionsmethode und noch andere Kombinationen mußten in Betracht gezogen werden. Schließlich wurden die Resultate dieser Untersuchungen benutzt, um daraus die Vorschriften bilden zu lassen, nach welchen aus der Beobachtung der durch den Erdmagnetismus induzierten Ströme die Inklination desselben abgeleitet wird. Es wurden von einigen Mitgliedern solche Beobachtungen angestellt und berechnet. Auch zur Entwicklung der

Methode der Messung kleiner Zeitteile wurden die oben bezeichneten Untersuchungen angewandt.

„Den Schluß des Seminars bildete die Entwicklung der Theorie der Verteilung des Magnetismus in weichem Eisen. Die Mitglieder wurden veranlaßt, diese Theorie auf eine weiche Eisenkugel anzuwenden; sie mußten die Wirkung einer solchen durch den Erdmagnetismus magnetisierten Kugel auf eine Deklinationsnadel berechnen und die Vorschriften finden, um aus den beobachteten Ablenkungen die Inklination abzuleiten. Diese Anwendungen wurden dahin erweitert, daß statt der Kugel ein anderer Rotationskörper aus Eisen betrachtet wurde.“

Außerdem wurde, was Neumann in seinem Bericht nicht erwähnt, die Induktion einer weichen Eisenmasse behandelt, die von einer Ebene begrenzt ist.

Aus anderen Semestern, in denen die Übungen sich ebenfalls auf die Lehre von der Elektrizität und dem Magnetismus erstreckten, führen wir noch an (1853—1854):

„Es wurden die Methoden der elektrischen Strommessung behandelt, die Theorie der anzuwendenden Vorrichtungen entwickelt und darauf gegründete Beobachtungen angestellt.

„Ich ließ ferner die Methoden untersuchen, durch welche die Konstanten in elektrischen Ketten bestimmt werden sollen, und in größeren Reihen von Beobachtungen zur Anwendung bringen. Hierbei wurden besondere Verfahrungsarten untersucht und ausgeführt, durch welche die Widerstände der Flüssigkeiten, von der Polarisation getrennt, bestimmt werden. Als Nebenuntersuchung wurde die Berichtigung der Differentialmultiplikatoren ausgeführt.“

Im Jahre 1858—1859 wurden u. a. die Eigenschaften der magnetischen Achsen erörtert und Methoden zu ihrer empirischen Bestimmung abgeleitet. Im folgenden Jahre wurden Fragen behandelt, die sich auf die Bewegung der Elektrizität in Ebenen oder in Räumen bezogen, wenn diese mit einem homogenen Leiter erfüllt sind oder mit Medien von verschiedenen Leitungsfähigkeiten. „Diese ihrer Natur nach sehr allgemeinen Untersuchungen mußten in speziellen Fällen so weit durchgeführt werden, daß aus ihnen Methoden abgeleitet werden konnten für die empirische Prüfung ihrer Resultate.“ Als spezielle Aufgaben über denselben Gegenstand werden 1862—1863 angeführt: Strömung der Elektrizität

in kreisförmigen Scheiben und Ringen, in elliptischen Scheiben, in rechtwinkligen Platten und Streifen. Auch wurde die Strömung in Platten untersucht, die aus zwei oder mehr verschiedenen Leitern zusammengesetzt waren.

Aus 1867 — 1868 sind erwähnenswert eingehende Untersuchungen über die Tangentenbussole.

„Es mußte die vorteilhafteste Stellung, die zweckmäßigste Einrichtung einer einfachen elektrischen Rolle bestimmt werden, und es mußte die Leistung eines Rollenpaares und seine entsprechende Aufstellung ermittelt werden. Diese Untersuchung mußte ausgedehnt werden auf zwei Rollenpaare usw. und endlich auf ein System von Rollenpaaren von beliebiger Anzahl. Dies führte zu Räumen von konstanter elektrodynamischer Wirkung. Diese Räume mußten nun benutzt werden zur Magnetisierung von Eisenkugeln. Die Wirkung dieser so magnetisierten Kugeln auf eine außerhalb des Rollensystems stehende Deklinationsnadel mußte berechnet werden, um aus deren Beobachtung die magnetischen Konstanten und ihre Variation abzuleiten.“

c) Bescheide des Ministeriums auf die Seminarberichte.

Wie schon oben erwähnt, mußten die Arbeiten der Seminarmitglieder alljährlich zusammen mit den Berichten dem Ministerium eingereicht werden; manche Berichte umfaßten, namentlich in den dreißiger und vierziger Jahren, je zwei Jahre. Bei der Rücksendung sprach sich das Ministerium fast stets durchaus anerkennend über die Leitung des Seminars aus. So z. B. wird in dem Ministerialreskript vom 20. Februar 1841 über den Bericht für das Jahr 1839—1840 gesagt: „Die Arbeiten liefern wieder den erfreulichen Beweis von den guten Fortschritten der Seminaristen in ihrer Wissenschaft und von den Früchten der Bemühungen ihrer Lehrer. Gern gibt der Minister der Hoffnung Raum, daß das gedachte Seminar sich auch ferner als eine der trefflichsten Pflanzschulen für Mathematik und Physik bewähren und aus demselben unter der umsichtigen Leitung der Professoren Jacobi und Neumann noch viele kenntnisreiche und tüchtige Lehrer der oben gedachten Wissenschaften hervorgehen werden.“ Nur einmal, bei Rücksendung der Arbeiten der Jahre 1841—1843, klingt neben dem Lobe ein leiser Tadel durch. Der Minister

schreibt, er habe sich von dem erfreulichen Zustande und den glücklichen Erfolgen des Seminars gern überzeugt. Er billige, daß die Aufgaben so gestellt seien, daß sie zugleich für einen größeren Kreis der Studierenden der Mathematik und Physik paßten und ihnen Anregung gäben, etwaige Lücken in ihren Kenntnissen auszufüllen. Dann fügte er den Wunsch hinzu, daß auch auf die Darstellung mehr Gewicht gelegt werde.

Wie diese Bemerkung gemeint ist, geht aus der Erwiderung Neumanns hervor, die dem Bericht über die Zeit Ostern 1843 bis 1845 beigelegt ist.

„Ew. Hochwohlgeboren haben mir unter dem 8. Oktober 1843 unter Zurücksendung der früheren Arbeiten des Seminars eröffnet, daß S. Exz. der Herr Staatsminister auf Grund des Gutachtens eines Sachverständigen in diesen Arbeiten die Bemühung um Verdeutlichung nicht im gleichen Verhältnis mit der Schwierigkeit des Gegenstandes stehend gefunden habe, daß das Schwierige öfters fast nur angedeutet sei, während Nebendinge hätten kürzer gegeben werden können. Ich erlaube mir in dieser Beziehung die ergebenste Bemerkung, daß die Schwierigkeit eines Gegenstandes subjektiv ist, und daß, wenn ein Mitglied des Seminars in seiner Arbeit mehr um die Verdeutlichung von Nebenpunkten sich bemüht, daraus zu schließen ist, daß für ihn der Hauptpunkt keine Schwierigkeit hatte, dieser vielmehr ihm aus den Vorträgen her geläufig war. Öfters mögen die Aufgaben gerade dieser Nebenpunkte wegen gestellt sein."

Seit dieser Zeit finden sich in den Erlassen, die die Rücksendung der Arbeiten begleiteten, keinerlei Bemerkungen, die nur entfernt einem Tadel ähnlich sehen, sondern nur Worte des Lobes und der Anerkennung.

d) Selbständige Arbeiten älterer Mitglieder. Dissertationen, die von Neumann angeregt sind.

Unser Bericht über den Seminarbetrieb würde nicht vollständig sein, wenn wir ihm nicht noch einiges über die Beschäftigung der weiter fortgeschrittenen Mitglieder hinzufügten.

Den älteren Mitgliedern des Seminars wurden die Mittel gewährt, sich in messenden Beobachtungen zu üben. Schriftliche

Arbeiten wurden von ihnen nur gelegentlich gefordert, wenn die experimentellen Resultate und deren Besprechung besondere Veranlassung dazu gaben. Über den Nutzen derartiger Übungen spricht sich Neumann (Bericht über 1852—1853) folgendermaßen aus: „Es liegt in der Natur solcher Beschäftigungen, daß das objektive, aufweisbare Resultat oft gering ist, während doch der subjektive Gewinn wichtig werden kann."

War die Übung im Beobachten eine hinreichende, so wurden weiter die schon ausgebildeten Mitglieder in der Ausführung selbständiger Untersuchungen unterstützt. Neumann sagt darüber: „Im Seminar ist immer der Grundsatz befolgt worden, daß das einzelne Mitglied sich von den durch den Dirigenten vorgelegten Beschäftigungen dispensieren kann, wenn es sich mit selbstgewählten Arbeiten beschäftigt. Es hat dann nur Bericht, mündlich oder schriftlich, über den Fortgang seiner Arbeit oder über die Schwierigkeiten, auf welche es gestoßen ist, abzustatten, bis es die Resultate selbst vorlegen kann. Es werden Arbeiten dieser Art besonders gern gesehen und ermuntert."

Es sei gestattet, von den so entstandenen größeren Arbeiten einige teils theoretische, teils experimentelle anzuführen.

Aus dem Jahre 1837 ist eine größere Arbeit Schumanns (s. oben S. 152—154) über Elastizität zu erwähnen, von der Neumann sagt, sie zeichne sich durch eigentümliche Auffassung und Selbständigkeit um so mehr aus, als der Verfasser von den neueren Arbeiten Poissons u. a. über denselben Gegenstand erst später Kenntnis erhielt. Auch finde man in ihr von der Koexistenz kleiner Schwingungen in einem besonders schwierigen Falle zuerst einen strengen Beweis.

Im Jahre 1840—1841 arbeitete Brix (später Ingenieur bei der preußischen Telegraphenverwaltung) über die experimentelle Bestimmung der latenten Wärme der Dämpfe. Er promovierte auf diese Arbeit, die in Pogg. Ann. 55, 1842, abgedruckt ist, im November 1841. Aus dem Jahre 1842—1843 ist eine Arbeit von A. E. Schinz, „Über den Einfluß der Temperatur auf die Steighöhen in kapillaren Röhren" zu nennen, hervorgegangen aus einer von Neumann gestellten Preisaufgabe; auf diese Arbeit promovierte der Verfasser im Juni 1843.

G. Kirchhoff hatte bereits in den Jahren 1843—1845 so tüchtige Seminararbeiten geliefert, daß Neumann in seinem Be-

richt an den Minister auf dieses „sich früh durchbildende Talent“ besonders aufmerksam macht. Kirchhoffs erste, in den Jahren 1845—1848 in Pogg. Ann. veröffentlichte Arbeiten sind direkt im Anschluß an die Seminarübungen verfaßt; Neumann sagt darüber in seinem Bericht 1845—1846: „Ein Mitglied, Herr stud. Kirchhoff, beschäftigte sich mit ihm eigentümlichen Aufgaben aus der Theorie des Elektromagnetismus; einige Resultate seiner Arbeiten habe ich ihn zur öffentlichen Kenntnis in Pogg. Ann. bringen lassen“ (Bd. 64 und Bd. 67, s. Kirchhoff, Ges. Abh., S. 1 und 17).

Auch Kirchhoffs Dissertation über die Konstanten, von welchen die Intensität der induzierten Ströme abhängt[1]) (abgedruckt in Pogg. Ann. Bd. 76, s. Kirchhoff, Ges. Abh., S. 118), ist von Neumann angeregt, der 1846 eine das Thema betreffende Preisaufgabe gestellt hatte. Die Hilfsmittel zu den erforderlichen Experimenten wurden vom Seminar zur Verfügung gestellt.

Aus dem Jahre 1855—1856 wird Müttrich[2]) als mit einer größeren zusammenhängenden Arbeit beschäftigt erwähnt, nämlich mit der kristallographischen und optischen Bestimmung des weinsteinsauren Kalinatrons; er hat diese Untersuchungen auch später fortgesetzt und darauf im Dezember 1863 promoviert.

Der Arbeiten von O. E. Meyer und C. J. H. Lampe über Reibung der Flüssigkeiten (1857—1858) ist oben schon gedacht. 1858—1859 wird berichtet: „Herr Meyer setzte seine schon früher begonnenen Beobachtungen über die innere Reibung von Flüssigkeiten fort.“

Meyer hat auf seine Arbeit im November 1860 promoviert, aber auch noch in späteren Jahren in einer Reihe von weiteren Arbeiten die Untersuchungen fortgesetzt.

Im Jahre 1859—1860 werden zwei größere Arbeiten von den Mitgliedern Saalschütz und Schindler angeführt, die als selbständige Fortsetzungen früherer Seminararbeiten zu betrachten sind. Die Arbeit von Saalschütz betraf den Wärmezustand der Erde. Er hat darauf im Juli 1861 promoviert.

Im Winter 1865—1866 wurden dem Verfasser dieser Schrift die Mittel zur Messung Newtonscher Ringe zur Disposition ge-

[1]) Es handelt sich um die Konstante ε, s. S. 111 Anm.

[2]) NB. Der Name ist bei Volkmann durch einen Druckfehler entstellt.

stellt. Auch diese Arbeit, nebst theoretischen Untersuchungen über jene Ringe (cfr. Pogg. Ann. Bd. 131, 1867), bildeten die Grundlage für die Promotion (März 1866).

Aus dem Jahre 1866 liegt eine größere Arbeit von L. Sohncke vor: „Über die Kohäsion der Kristalle oder über die Verteilung des Drucks um einen Punkt eines kristallinischen Mediums im natürlichen Zustande und über die Spaltbarkeit der Kristalle“. Diese Arbeit ist eine Vorstudie zu Sohnckes späteren Arbeiten über Kristallstruktur. Erwähnt sei, daß Sohncke, der erst nach Abschluß seiner Studien nach Königsberg kam, an den Seminarübungen nur drei Semester hindurch (Herbst 1862 bis Ostern 1864) teilgenommen hat, aber, wie viele andere frühere Seminarmitglieder, noch weiter mit dem Seminar in Verbindung geblieben ist.

Endlich sind noch aus dem Jahre 1867—1868 die Untersuchungen von O. Frölich: „Über den Einfluß der Absorption der Sonnenwärme in der Atmosphäre auf die Temperatur der Erde“ zu erwähnen (Dissertation, Juni 1869), und weiter 1873 die von W. Voigt: „Untersuchungen über die Elastizitätsverhältnisse des Steinsalzes“ (Dissertation, März 1874).

Im vorstehenden ist eine Reihe von Dissertationen genannt, die Neumann angeregt hat; wir fügen noch folgende Dissertationen hinzu, die ebenfalls auf Neumann zurückzuführen sind:

J. A. Friedrich (September 1843[1]), F. J. G. Ellinger (Dezember 1843), J. E. F. Th. Ebel (Dezember 1845), A. Clebsch (März 1854), „De motu ellipsoidis in fluido incompressibili viribus quibuslibet impulsi“, F. Just (Dezember 1862), „De arcubus supernumerariis, qui in iride observantur“, Von der Mühll (August 1866), der eingehend untersucht, welchen Einfluß auf die Reflexion und Brechung eine Oberflächenschicht (Übergangsschicht zwischen den beiden Medien, an denen die Brechung erfolgt) ausübt.

Endlich sind auf Neumann auch zwei Berliner Disserta-

[1]) Volkmann meint, auf die Dissertationen von J. A. Friedrich und F. J. Ellinger sei Neumann ohne Einfluß gewesen. Ich bin der entgegengesetzten Ansicht, da die beiden Herren verschiedene Semester an Neumanns Seminarübungen teilgenommen haben und daher wohl anzunehmen ist, daß auch ihre Arbeiten aus dem Seminar hervorgegangen sind.

tionen zurückzuführen: die von Lipschitz, welche die Magnetisierung eines dreiachsigen Ellipsoids behandelt (1857), und die von Paul Du Bois Reymond: „De aequilibrio fluidorum" (1859), in welch letzterer zuerst der Neumannsche Satz der Kapillarität (s. S. 147) veröffentlicht ist, mit dem ausdrücklichen Hinweis darauf, daß dieser Satz von Neumann herrührt.

e) Verzeichnis einer Reihe weiterer Schüler Neumanns.

Außer den bisher genannten hat noch eine große Reihe anderer Schüler Neumanns durch seine Vorlesungen, vorzugsweise aber durch seine Seminarübungen die mannigfachsten Anregungen erfahren, die bei vielen in ihren späteren Arbeiten klar zutage treten. Wir nennen aus der vollständigen Liste der Neumannschen Schüler, die sich bei Volkmann findet[1]), noch folgende Mathematiker, Physiker und Chemiker, indem wir die schon im vorhergehenden erwähnten fortlassen.

O. Meyer, später Gymnasialprofessor in Königsberg, Verfasser mehrerer Arbeiten im Crelleschen Journal, darunter eine über das dreiachsige Ellipsoid als Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeit; Albrecht, ehemaliger Direktor der Gewerbeschule in Königsberg; die Mathematiker J. G. Rosenhain, F. H. Siebeck, Borchardt, Joachimsthal, Aronhold, Ph. L. Seidel, E. Heine, Durège, ferner Amsler (Erfinder des Polarplanimeters), W. A. Dumas, später Professor am grauen Kloster in Berlin (Über die Bewegung des Raumpendels mit Rücksicht auf die Rotation der Erde, Crelle 50; Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit dünner Metalldrähte, Pogg. Ann. 129, 1866), E. Schröter (gestorben als Professor der Mathematik in Breslau), C. Neumann (Leipzig), Bardey (Herausgeber einer bekannten mathematischen Aufgabensammlung), Radau, gegenwärtig Mitglied der Pariser Akademie, G. Quincke (Heidelberg), F. W. Fuhrmann (bekannt durch seine Arbeiten über die merkwürdigen Punkte des Dreiecks), der Meteorologe Wild, der Chemiker Lothar Meyer, Minnigerode (gestorben als Professor in Greifswald), Pebal (der in Königsberg hörte, als er schon Professor in Lemberg war,

[1]) Auch die Angaben, die Lindemann in der Gedächtnisrede auf Seidel (s. S. 151) über das Königsberger mathematisch-physikalische Seminar gemacht hat, sind hier benutzt, ebenso die Seminarberichte.

gestorben als Professor der Chemie in Graz), Milinowski (Geometer, gestorben als Oberlehrer im Elsaß), P. Gordan (Erlangen), Zöppritz (gestorben als Professor der Geographie), Pape (gestorben in Berlin als emeritierter Professor der Königsberger Universität), Reichel (Professor an der landwirtschaftlichen Hochschule in Berlin), Rathke (Professor der Chemie in Marburg), Kossak (gestorben 1892 als Professor an der technischen Hochschule zu Berlin), Auwers, jetzt Sekretär der Berliner Akademie, O. E. F. Tischler (gestorben als Archäologe des Provinzialmuseums in Königsberg), J. C. Kiessling (bekannt durch seine Untersuchungen über Dämmerungserscheinungen, vor kurzem gestorben als emeritierter Gymnasialprofessor), A. Momber (Vorstand des naturwissenschaftlichen Vereins in Danzig), Hossenfelder (Gymnasialprofessor in Strasburg in Westpreußen, bekannt durch einige Arbeiten in den mathematischen Annalen), Hutt (emer. Realschuldirektor in Bernburg), E. Schröder (gestorben als Professor am Polytechnikum in Karlsruhe), A. Mayer (Professor der Mathematik in Leipzig), H. Weber (Professor der Mathematik in Straßburg), H. Weber (Professor der Physik in Braunschweig), Pietzker (Gymnasialprofessor in Nordhausen), Dorn (Professor der Physik in Halle), Kostka (Gymnasialprofessor in Insterburg), Mischpeter (Gymnasialprofessor in Königsberg), Gundelfinger (Professor der Mathematik in Darmstadt), Thiesen (Professor, Mitglied der physikalisch-technischen Reichsanstalt), L. Hübner (Gymnasialprofessor in Schweidnitz), Pernet (gestorben als Professor der Physik in Zürich), R. v. Eötvös (Budapest), G. Baumgarten (Gymnasialprofessor in Dresden), Böttcher (Rektor des Realgymnasiums in Leipzig), M. Krause (Professor an der technischen Hochschule in Dresden), P. Volkmann (Königsberg), H. Dobriner (gestorben in Frankfurt), Rahts (Assistent an der Sternwarte in Königsberg).

III. Neumanns Bestrebungen zur Errichtung eines physikalischen Laboratoriums.

Schon früh hatte sich Neumann überzeugt, daß ein erfolgreiches Studium der Physik nicht möglich sei, wenn die Studierenden nicht auch im Experimentieren unterwiesen würden. Seit dem Jahre 1829 hat er daher wiederholt auf den Mangel eines

Laboratoriums hingewiesen und um Abhilfe gebeten. Als im Jahre 1839 die Errichtung eines neuen Universitätsgebäudes geplant wurde, hat er in einer Eingabe ausgeführt, daß die Räume für die chemische, physikalische und mineralogische Sammlung vom Universitätsgebäude zu trennen und sowohl mit Arbeitsräumen, als auch mit Dienstwohnungen für die Direktoren zu versehen seien [1]).

Besonders merkbar machte sich der Mangel eines Laboratoriums nach der Gründung des Seminars, und von Anfang an war Neumann bestrebt, mit den theoretischen Arbeiten auch praktische Übungen zu verbinden. Schon im Jahre 1837 weist er in dem Seminarbericht darauf hin, daß es vor allem darauf ankomme, die jungen Leute selbst experimentierend und beobachtend zu beschäftigen. Auf die Notwendigkeit von physikalischen Laboratorien, mit denen heute selbst die kleinste Universität ausgestattet ist, hingewiesen zu haben zu einer Zeit, wo, in Deutschland wenigstens, niemand sonst an derartige Einrichtungen für Physik dachte, ist ein entschiedenes Verdienst Neumanns. Leider war es ihm durch die Ungunst der Zeiten nicht vergönnt, das, was er erstrebte, zu erreichen; aber nie hörte er auf, auf die Notwendigkeit eines Laboratoriums hinzuweisen, durch keine Mißerfolge ließ er sich von erneuten Petitionen abhalten; ja, als fast Achtzigjähriger, nachdem er von der Verpflichtung, Vorlesungen zu halten, entbunden war, trat er noch warm für die Erbauung des Laboratoriums ein.

Wie schwer Neumann die durch das Fehlen eines Laboratoriums hervorgerufene Einschränkung seiner Wirksamkeit empfand, geht aus einer Eingabe hervor, die er 1841 anläßlich der Ablehnung des Rufes nach Dorpat an den Universitätskurator richtete.

„Meine akademische Wirksamkeit (wie zufrieden ein hohes Ministerium sich auch neulich wieder darüber ausgesprochen hat) ist nur der Schatten von dem, was sie sein könnte. Es hätte wirklich sich hier in Königsberg eine Pflanzschule für mathematische Physik bilden können. Mit Schmerz und Scham hat es mich oft erfüllt, junge Leute, zum Teil aus der Ferne kommend, welche sich meiner Leitung überlassen wollten, wegen Unzuläng-

[1]) Erinnerungsblätter, S. 347. Volkmann, S. 9.

lichkeit der Mittel und Gelegenheit auf eine Weise beschäftigen zu müssen, die ich nur durch den Druck der Verhältnisse rechtfertigen kann. Die Einrichtung auf unserer Universität ist ja noch immer so, als könnte ich Physik in Vorlesungen lehren — ich habe ja nicht einmal ein Laboratorium. Meine eigene wissenschaftliche Tätigkeit muß sich beschränken auf das, was ein Physiker auf einer Dachstube allenfalls für die Wissenschaft etwa noch tun kann" [1]).

Mußte Neumann so während seiner ganzen Tätigkeit als akademischer Lehrer das wichtigste Hilfsmittel für einen erfolgreichen Unterricht entbehren, so suchte er wenigstens die geringen Mittel des Seminars möglichst nutzbar zu machen. Schon vom Jahre 1839 an, wo dem Seminar ein, wenn auch geringer fester Fonds bewilligt war, begann er (vgl. oben S. 171) praktische Übungen anstellen zu lassen. Freilich konnten diese zunächst nur in geringem Umfange, und auch nur im Sommer stattfinden, da die Räume der mineralogischen Sammlung (in der alten Albertina am Domplatz) wegen ihrer Unheizbarkeit im Winter nicht benutzt werden konnten [2]). Noch öfter treten in den Seminarberichten die Klagen über den Mangel der für die Übungen zur Disposition stehenden Räumlichkeiten, die nicht gestatten, den experimentellen Beschäftigungen die erwünschte Ausdehnung zu geben, hervor, und 1843 wird von Neumann wiederum die Erbauung eines Laboratoriums, bzw. die Mietung von Räumen zu diesem Zwecke beantragt. Ja in einer Eingabe von 1844 erbietet er sich, einen Teil der Mietskosten zu tragen, und erwähnt dabei, daß er 15 lange Jahre vergeblich gehofft, die Hindernisse schwinden zu sehen, welche der ganzen und vollen Anwendung seiner Kräfte entgegenstehen.

Im Jahre 1845 kommt er bei Gelegenheit des Antrages, Richelot die Leitung der mathematischen Abteilung des Seminars definitiv zu übertragen, auf das Laboratorium zurück, „sowie ich auch nicht aufhören werde zu hoffen auf die Gewährung des sowohl zur vollen Entwicklung der Wirksamkeit des Seminars, als des Gedeihens des physikalischen Studiums überhaupt notwendigen physikalischen Laboratoriums". Keine der wiederholten Ein-

[1]) Erinnerungsblätter S. 352 bis 353.

[2]) Seminarbericht 1841.

gaben, denen 1846 Andeutungen über die Erfordernisse eines physikalischen Laboratoriums beigefügt waren [1]), hatte Erfolg.

Um überhaupt das Experimentieren der Seminarmitglieder zu ermöglichen, mußten um diese Zeit den einzelnen Mitgliedern die betreffenden Apparate in ihre Wohnungen mitgegeben werden, was übrigens auch in späteren Jahren noch vielfach geschah.

Eine kleine Besserung der Verhältnisse trat ein, als Neumann 1847 ein eigenes Haus erworben hatte. Von diesem einstöckigen, auf dem Hintertragheim gelegenen Hause, dessen Garten bis an den Schloßteich reichte, nahm Neumann für sich und seine Familie nur einen Teil in Anspruch, die besten und größten Zimmer benutzte er zur Aufstellung der Instrumente, die er teils aus eigenen Mitteln, teils für das Seminar allmählich anschaffte. Hier wurden denn auch die praktischen Übungen der Seminaristen angestellt, auf die oben an den verschiedensten Stellen hingewiesen ist. Freilich war das bei der Beschränktheit der Räumlichkeiten und der Beschränktheit der Mittel noch immer nicht in dem erwünschten Umfange möglich; es war gewissermaßen nur ein Notbehelf. Neumann spricht „von der teilweisen Beseitigung der Ungunst der Umstände, welche die lange von ihm gewünschte größere Ausdehnung dieser Art von Tätigkeit im Seminar verhinderte“; aber er ist dem Ministerium schon für die Erfüllung nur eines geringen Teiles seiner Wünsche dankbar.

In späteren Jahren kommt er nicht mehr auf das Laboratorium zurück, „da der Wirkungskreis, in dem er sich jetzt befinde, seine Kräfte so vollständig in Anspruch nehme, daß er nicht glaube, ihn noch erweitern zu dürfen“ [2]).

Erst als er 1876 seine Lehrtätigkeit aufgegeben, betont er in einer Eingabe an den Kurator von neuem die Notwendigkeit des Laboratoriums. Die Eingabe hat folgenden Wortlaut [3]):

„Die Notwendigkeit eines physikalischen Laboratoriums für die hiesige Universität ergibt sich aus folgenden zwei Tatsachen:

1. kann der physikalische Unterricht ohne ein solches Laboratorium nur unvollständig, nicht in der Ausdehnung erteilt

---

[1]) Erinnerungsblätter, S. 445.

[2]) Erinnerungsblätter, S. 379.

[3]) Frl. Neumann teilt dieselbe nach einem Konzept mit; zwischen diesem und der wirklichen Eingabe sind kleine Abweichungen, namentlich am Schluß vorhanden.

werden, wie es das Bedürfnis der künftigen Lehrer der höheren Lehranstalten der Provinz, dem heutigen Zustande der Physik entsprechend, erfordert;

2. können die Lehrer der Physik ohne Laboratorium sich nicht die Mittel verschaffen, die nötig sind, um an der Entwicklung der Wissenschaft denjenigen Anteil zu nehmen, der von akademischen Lehrern mit Recht erwartet wird.

„Der akademische Lehrer, der sich noch seines Berufes bewußt ist, weiß, daß er nicht allein für den Unterricht seiner Disziplin berufen ist, daß er an der weiteren Entwicklung und Fortbildung derselben teilzunehmen hat, ja er weiß, daß seine Wirksamkeit als Lehrer nur dann erfolgreich und fruchtbar werden kann, wenn er als selbständiger Forscher der Wissenschaft sich fühlt. Sind demselben die Mittel zu eigenen wissenschaftlichen Arbeiten versagt, und sie sind es, wenn ihm kein Laboratorium gewährt wird, so wird er die erste Gelegenheit ergreifen, die hiesige Universität zu verlassen. Hervorragende Physiker wird unsere Universität ohne Laboratorium heute nicht gewinnen können. Man denke sich in die Lage eines wissenschaftlichen Mannes, der große Reihen wichtiger Untersuchungen und Beobachtungen seiner Zeitgenossen auf sich beruhen lassen muß, weil er nicht die Mittel und die Räumlichkeiten besitzt, dieselben zu prüfen und sich ein selbständiges Urteil über den Wert und die Grenzen der Zuverlässigkeit ihrer Resultate zu verschaffen; man denke sich denselben Mann, wie er bei jedem ihm entgegentretenden wissenschaftlichen Problem, ehe er an die Untersuchung geht, ängstlich sich erst fragen muß, ob seine Mittel eine solche zulassen. Solche Beengung des akademischen Dozenten kann nicht fördernd auf seinen Unterricht wirken, diese Hindernisse seiner akademischen Tätigkeit können nur das Verlangen erzeugen, sich an einer anderen Universität einen Wirkungskreis zu suchen.

„Was den Unterricht selbst in der Physik betrifft, bemerke ich, daß derselbe einer doppelten Forderung zu genügen hat. Er hat zunächst diejenigen physikalischen Kenntnisse und Anschauungen zu gewähren, welche zur allgemeinen Bildung derjenigen gehören, die sich dem Studium irgend eines Zweiges der Naturwissenschaften, wie Chemie, Mineralogie, Botanik usw., widmen oder Medizin studieren wollen. Dann hat 2. der physikalische

Unterricht für diejenigen zu sorgen, welche Lehrer der Physik werden wollen. Der ersten Forderung wird genügt durch die Vorlesungen über Experimentalphysik. . Diese Vorlesungen bilden zugleich die Grundlage für jedes tiefer gehende Studium der Physik, sie finden für diejenigen, die sich zu Physikern ausbilden wollen, ihre Ergänzung in den Vorlesungen über theoretische Physik, worin der mathematische Zusammenhang der Phänomene, welche die Experimentalphysik mehr oder weniger lose nebeneinander stehen lassen mußte, entwickelt wird, soweit das bis jetzt der Wissenschaft gelungen ist.

„Mit diesem experimentellen und theoretischen Unterricht schließt unsere Universität die physikalische Ausbildung der Regel nach ab, von einzelnen Ausnahmefällen braucht hier nicht gesprochen zu werden, und deshalb bleibt die Ausbildung unvollständig. Ihr fehlt noch eine wesentliche Seite, die praktische Ausbildung. Die Behandlung von physikalischen Apparaten, die Kunst zu beobachten, die Methoden für Messungen, die Methoden, numerisch festzustellende Elemente aus den Erscheinungen abzuleiten usw., können nur in praktischer Beschäftigung in einem Laboratorium gelernt werden, und nur hier kann der Lehrer die erforderlichen Anweisungen und Belehrungen erteilen. Diese Unvollständigkeit der physikalischen Ausbildung der Physik Studierenden ist von um so größerem Gewicht, da dieselben meistens nicht in der Lage sind, eine Ergänzung ihrer Ausbildung auf einer anderen Universität suchen zu können, wozu ich in zulässigen Fällen immer angeraten habe.“

Eine weitere Eingabe, die in dieser Angelegenheit am 7. Juni 1876 von Voigt gemacht ist, ist von Neumann unterschrieben.

Auch jetzt vergingen, obwohl allerseits der gute Wille vorhanden war, noch Jahre, bis Neumanns sehnlichster Lebenswunsch in Erfüllung ging. Erst in den Jahren 1884—1886 wurde das Laboratorium erbaut (ohne Dienstwohnung), zu einer Zeit also, wo Neumann, fast neunzigjährig, von der Einrichtung keinen Gebrauch mehr machen konnte.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06567 5319

